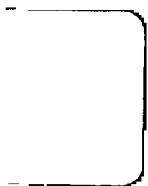


U.O.V.S. - BIBLIOTHEEK

198308236801220000019



198308236801220000019



DIE TOEPASSING VAN KRIGING IN GEOHIDROLOGIE

GERRIT JOHANNES VAN TONDER

Proefskrif voorgelê om te voldoen aan die vereistes vir die graad

PHILOSOPHIAE DOCTOR

in die Fakulteit Natuurwetenskappe, Departement Geohidrologie

Universiteit van die Oranje-Vrystaat

November 1982

Promotor : Prof. J.F. Botha

Medepromotor : Prof. F.D.I. Hodgson

BEDANKINGS

Hierdie studie is onder die leiding van prof. J.F. Botha, Numeriese Wiskundige aan die Instituut vir Grondwaterstudies, en prof. F.D.I. Hodgson, Direkteur van die Instituut vir Grondwaterstudies, voltooi. Veral aan prof. J.F. Botha, wat as my promotor opgetree het, 'n woord van hartlike dank vir sy aanbevelings en kosbare tyd aan hierdie studie gespandeer.

Aan die ander personeel verbonde aan die Instituut vir Grondwaterstudies wat gehelp het met hierdie ondersoek, naamlik mnr. J.J. Coetzer vir die teken van figure, en mev. M.J. Botha vir die puik tikwerk, 'n woord van dank.

Ten laaste 'n spesiale woord van dank aan my ouers, my vrou Mavis, en dogter Sanri, vir die inspirasie gedurende die afgelope drie jaar.

Hierdie studie is met die finansiële bystand van die WNNR uitgevoer, wat met dank erken word.

VOORWOORD

Voor die koms van die elektroniese rekenaar is kontoerkaarte met die hand opgestel deur van grafiese interpolasie gebruik te maak. Hierdie proses is baie omslagtig en tydrawend, maar kan aansienlik vergemaklik word deur die interpolasie en die trek van die kontoere te outomatiseer. Geohidroloë is dan ook gedurigdeur op die uitkyk vir interpolasie-tegnieke wat vir dié doel aangewend kan word. 'n Afdeling van die geohidrologie waar interpolasie van groot waarde kan wees, is by die daarstelling van 'n numeriese model vir die voorspelling van watervlakke in 'n akwifer as 'n funksie van tyd. So 'n numeriese model vereis verteenwoordigende waardes van die transmissiwiteit en bergingskoeffisiënt by 'n groot aantal punte oor die gebied wat die akwifer beslaan. Aangesien hierdie twee parameters die voorspelde watervlakke tot 'n baie groot mate beïnvloed, moet daar altyd gepoog word om hul so akkuraat as moontlik te bepaal. Pomptoetse wat uitgevoer kan word om hierdie parameters te bepaal, is egter baie duur en word derhalwe gewoonlik tot slegs 'n handvol boorgate beperk. Interpolasie van hierdie data is dus noodsaaklik voordat die model ontwikkel kan word. Dieselfde beginsels geld vir ander geohidrologiese parameters soos watervlakke, hidrogechemiese elemente en geofisiese groottes.

Metodes wat algemeen vir interpolasie gebruik word, is kleinste kwadraat passings en die afstandsgewegde metode. 'n Groot nadeel van al hierdie metodes is egter die gebrek aan doeltreffende foutskatting van die geïnterpoleerde waardes by nie-eksperimentele punte. 'n Metode wat hierdie probleem oorkom, is kriging. Hierdie metode lewer nie net 'n geïnterpoleerde waarde nie, maar ook 'n foutskatting met 'n gegewe betroubaarheidsinterval. Die hoofdoel van hierdie studie is om die toepassing van kriging as interpolasie-metode in die geohidrologie te ondersoek.

In hoofstuk 1 word die benadering van 'n ruimte-afhanklike veranderlike bespreek en 'n kort opsomming van die drie basiese benaderings, naamlik die metode van kleinste kwadrate, die afstandsgewegde metode en die metode van interpolasie word gegee.

Hoofstuk 2 word aan die basiese teorie van kriging, in die besonder puntkriging, gewy. Die rede hiervoor is dat dit feitlik onmoontlik is om die verandering van geohidrologiese data in blokke te gaan ondersoek. In die eerste vier paragrawe word die basiese statistiese begrippe, wat met kriging verband hou, bespreek, terwyl paragraaf 2.5 oor kriging onder die intrinsieke hipotese handel. In paragraaf 2.6 word die berekening van die eksperimentele semi-variogram beskou en in paragraaf 2.7 passingsmodelle vir hierdie semi-variogramme. Paragraaf 2.7.4 handel oor 'n voorgestelde manier van passing, naamlik kleinste kwadraat latfunksies, indien die eksperimentele semi-variogram 'n holte-effek vertoon. In paragraaf 2.8 word kriging aan die hand van 'n eenvoudige voorbeeld toegelig. Die volgende twee paragrawe handel oor die kriging van onsekere data en die geldigheid van die krigingmodel. In paragraaf 2.11 word die teorie van universele kriging bespreek. Hier word getoon hoe die universele krigingmatriks opgebreek kan word, wat aanleiding tot 'n onsydige interpolasie-metode gee waarvoor die semi-variogram nie bekend hoef te wees nie. Aan die einde van paragraaf 2.11 word die toepassing van Fletcher se boetefunksie op intrinsieke funksies bespreek.

Hoofstuk 3 handel oor parameteridentifikasie in die geohidrologie. Paragraaf 3.1 word aan die skatting van transmissiwiteite en bergingskoëffisiënte oor 'n akwifer gewy. Vir illustrasiedoeleindes word daar van waardes bepaal vir die Kaapse Vlakte-akwifer gebruik gemaak, waarvan die geologie kortliks in paragraaf 3.2 bespreek word. Verskillende krigingmodelle vir die skatting van transmissiwiteite word hierna in paragraaf 3.3 bespreek en met die resultate van die metode van kleinste kwadrate en die afstandsgeweegde metode in paragraaf 3.4 bespreek. Dieselfde studie vir die bergingskoëffisiënte volg in paragraaf 3.5. Paragraaf 3.6 word aan die veldtoepassings van kriging in modellering gewy deur te kyk of 'n minimum aantal datapunte nog steeds akkurate skattings lewer, en hoe die foutkaart van kriging gebruik kan word.

Hoofstuk 4 handel oor die interpolasie van watervlakke. In paragraaf 4.2 word verskillende universele krigingmodelle bespreek wat deur die voorgestelde model van Gambolati en Volpi in paragraaf 4.3 gevolg word. In paragraaf 4.4 word hierdie verskillende modelle met ander interpolasie-metodes vergelyk.

Hoofstuk 5 word aan die interpolasie van hidrogeochemiese parameters in die Vryburgkompartement gewy. Die hoofstuk begin met 'n motivering waarom hierdie parameters belangrik vir die geohidroloog is en word gevolg met die kriging van hierdie parameters.

In hoofstuk 6 word die interpolasie van gravimetriese data aan die hand van 'n gevallestudie in Wes-Transvaal bespreek. Die eerste paragraaf handel oor die belangrikheid van die opsporing van oplossingsholtes, terwyl in paragraaf 6.3 die volume van hierdie oplossingsholtes bereken word deur van so min as 5 persent van die oorspronklike gravimetriese data en kriging gebruik te maak.

Gedurende hierdie studie moes daar noodwendig verskeie rekenaarprogramme ontwikkel word.* Navrae oor die programme kan gerig word aan die Departement Geohidrologie of die Instituut vir Grondwaterstudies aan die Universiteit van die Oranje-Vrystaat.

* Hierdie programme beslaan etlike bladsye en word dus nie hier ingesluit nie.

INHOUDSOPGAWE

BLADSY

BEDANKINGS	(i)
VOORWOORD	(ii)
LYS VAN FIGURE	(viii)
LYS VAN TABELLE	(xiv)

HOOFSTUK 1 : BENADERING VAN 'N RUIMTE-AFHANKLIKE VERANDERLIKE

1.1 INLEIDING	1
1.2 DIE METODE VAN KLEINSTE KWADRATE (MKK)	2
1.2.1 ALGEMEEN	2
1.2.2 TENDENSANALISE	3
1.2.3 DIE FOURIERBENADERING	4
1.3 AFSTANDSGEWEEGDE METODES (AGM)	4

HOOFSTUK 2 : DIE TEORIE VAN KRIGING

2.1 ALGEMEEN	6
2.2 DEFINISIES	8
2.2.1 DIE BEGRIP RUIMTE-AFHANKLIKE VERANDERLIKE (RAV)	8
2.2.2 STATISTIESE BEGRIPPE	8
2.3 DIE KOVARIANS- EN KORRELASIEDIAGRAMME	10
2.4 DIE VARIOGRAM EN SEMI-VARIOGRAM	11
2.4.1 DEFINISIE	11
2.4.2 EIENSKAPPE VAN DIE SEMI-VARIOGRAM	15
2.5 KRIGING ONDER DIE INTRINSIEKE HIPOTESE	15
2.5.1 INLEIDING	15
2.5.2 KRIGING INDIEN DIE GEMIDDELDE EN DIE KOVARIANS BEKEND IS	17
2.5.3 KRIGING INDIEN DIE GEMIDDELDE BEKEND IS	19
2.6 BEREKENING VAN SEMI-VARIOGRAM	22
2.6.1 ALGEMEEN	22
2.6.2 DIE EENDIMENSIONALE GEVAL	22
2.6.3 DIE TWEEDIMENSIONALE GEVAL	23
2.7 MODELLE VIR DIE SEMI-VARIOGRAM	32
2.7.1 ALGEMEEN	32
2.7.2 MODELLE MET 'N DRUMPEL	33
2.7.2.1 Model met 'n algehele klonteffek	33
2.7.2.2 Die sferiese model	33
2.7.2.3 Die eksponensiale model	34
2.7.2.4 Die Gauss-model	34

INHOUDSOPGAWE (VERVOLG)

BLADSY

2.7.3	MODELLE SONDER 'N DRUMPEL	34
2.7.3.1	Lineêre model	34
2.7.3.2	Die de Wijs-model	35
2.7.4	KUBIESE LATFUNKSIES	37
2.8	KRIGING – 'N EENVOUDIGE VOORBEELD	40
2.9	KRIGING VAN ONSEKERE DATA	44
2.10	GELDIGHEID VAN DIE KRIGINGMODEL	45
2.11	UNIVERSELE KRIGING	48
2.12	MOONTLIKE TOEPASSINGS VAN KRIGING IN DIE GEOHIDROLOGIE	56

HOOFSTUK 3 : PARAMETERIDENTIFIKASIE IN DIE GEOHIDROLOGIE

3.1	ALGEMEEN	57
3.2	DIE KAAPSE VLAKTE	62
3.3	KRIGING VAN DIE TRANSMISSIWITEITE (T) VAN DIE KAAPSE VLAKTE	64
3.4	KLEINSTE KWADRAAT-MODEL EN AGM	72
3.5	KRIGING VAN DIE BERGINGSKOËFFISIËNTE (S) VAN DIE KAAPSE VLAKTE	83
3.6	VELDTOEPASSINGS VAN KRIGING IN MODELLERING	87

HOOFSTUK 4 : INTERPOLASIE VAN WATERVLAKKE

4.1	ALGEMEEN	103
4.2	UNIVERSELE KRIGING	105
4.3	DIE MODEL VAN GAMBOLATI EN VOLPI (GVM)	113
4.4	VERGELYKING TUSSEN DIE VERSKILLENDE MODELLE EN DIË GEBASEER OP DIE AGM EN TENDENSANALISE	114

HOOFSTUK 5 : INTERPOLASIE VAN HIDROGEOCHEMIESE PARAMETERS

5.1	ALGEMEEN	120
5.2	DIE HIDROGEOCHEMIE VAN DIE VRYBURGKOMPARTEMENT	123
5.3	KRIGING VAN DIE HIDROCHEMIESE DATA	123

HOOFSTUK 6 : INTERPOLASIE VAN GRAVIMETRIESE DATA

6.1	ALGEMEEN	150
6.2	INTERPOLASIE VAN GRAVITASIE-OPNAMES IN DIE ZUURBEKOMKOMPARTEMENT	151
6.3	DIE BEPALING VAN VOLUMES	152

INHOUDSOPGAWE (VERVOLG)

	BLADSY
BYLAE A TRANSMISSIWITEITE EN BERGINGSKOEFFISIËNTE VAN DIE KAAPSE VLAKTE	165
BYLAE B WATERVLAKWAARDES VAN DIE TOPPENISH CREEK-AKWIFEER ..	167
BYLAE C HIDROGEOCHEMIESE WAARDES VAN DIE VRYBURG-OMGEWING .	168
BYLAE D GRAVITASIEWAARDES VAN DIE ZUURBEKOMKOMPARTEMENT ..	170
VERWYSINGS	172
OPSOMMING	177

LYS VAN FIGURE

	BLADSY	
Figuur 2.3.1.	Algemene vorm van 'n kovariansdiagram.	12
Figuur 2.3.2.	Algemene vorm van 'n korrelasiediagram.	12
Figuur 2.4.1.	Algemene vorm van 'n semi-variogram.	13
Figuur 2.4.2.	Voorstelling van die drumpel, klonteffek en strekking van 'n semi-variogram.	16
Figuur 2.4.3.	Verband tussen die kovariansdiagram en semi-variogram.	16
Figuur 2.6.1.	Monsterwaardes langs 'n lyn.	24
Figuur 2.6.2.	Eksperimentele semi-variogram van die waardes in figuur 2.6.1. Die stippellyn het geen ander doel as 'n gids vir die oog nie.	24
Figuur 2.6.3.	Nie-gelykverspreide data (a) voor groepering en (b) na groepering.	24
Figuur 2.6.4.	Voorstelling van ellips wat anisotropie voorstel.	28
Figuur 2.6.5.	Verhouding tussen die radius van 'n ellips en die rigting daarvan vir 'n verspreiding van hoofasse.	28
Figuur 2.6.6.	Klassifikasiepatroon vir die berekening van 'n semi-variogram vir onreëlmatig verspreide data.	30
Figuur 2.6.7.	Definisie van die hoek ω en ψ asook die vektore \underline{g} en \underline{r} gebruik in die berekening van 'n semi-variogram volgens die metode van David (1977).	31
Figuur 2.7.1.	Verskillende semi-variogram passingsmodelle (a) sferies, (b) eksponensiaal, (c) Gauss en (d) de Wijs.	36
Figuur 2.7.2.	Voorbeeld van 'n holte-effek semi-variogram.	37
Figuur 2.7.3.	'n Passing van kubiese latfunksies (—) aan eksperimentele punte (*).	41
Figuur 2.8.1.	Eksperimentele dataverspreiding vir krigingvoorbeeld.	42
Figuur 2.8.2.	Grafiese voorstelling van die eksperimentele semi-variogram vir die data in figuur 2.8.1.	42
Figuur 3.1.1.	Ontwateringskurwes vir verskillende transmissiwiteite (T) en bergingskoëffisiënte (S).	58

LYS VAN FIGURE (VERVOLG)

	BLADSY
Figuur 3.1.2. Voorbeeld van 'n eindige verskil netwerk vir die Kaapse Vlakte-akwifer.	60
Figuur 3.2.1. Geografiese ligging van die Kaapse Vlakte en studiegebied.	63
Figuur 3.2.2. Ligging van 70 boorgate in die Kaapse Vlakte waarby pomptoetse uitgevoer is.	65
Figuur 3.3.1. Transmissiwiteitsverspreiding in die Kaapse Vlakte.	66
Figuur 3.3.2. Semi-variogramme van die transmissiwiteit in 'n N-S en O-W rigting. Punte is vir duidelikheid met krommes verbind.	67
Figuur 3.3.3. Gemiddelde eksperimentele semi-variogram van die transmissiwiteit in die Kaapse Vlakte.	68
Figuur 3.3.4. Kleinste kwadraat latfunksie passingsmodel van die eksperimentele semi-variogram van die transmissiwiteit in die Kaapse Vlakte.	69
Figuur 3.3.5. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met 'n sferiese passingsmodel verkry.	73
Figuur 3.3.6. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met die model $\gamma(h) = 0,16 h^{1,5}$ verkry.	74
Figuur 3.3.7. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met 'n logaritmiiese model verkry.	75
Figuur 3.3.8. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met intrinsieke funksies van orde 0 verkry.	76
Figuur 3.3.9. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met kleinste kwadraat latfunksies verkry.	77
Figuur 3.3.10. Driedimensionale voorstelling van die transmissiwiteit in die Kaapse Vlakte.	78
Figuur 3.4.1. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met 'n derdegraadse tendensanalise verkry.	79
Figuur 3.4.2. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met die afstandsgeweegde metode (AGM) verkry.	80
Figuur 3.5.1. Eksperimentele semi-variogram van die bergingskoeffisiënte in die Kaapse Vlakte met kleinste kwadraat latfunksies as passing.	84

LYS VAN FIGURE (VERVOLG)

	BLADSY	
Figuur 3.5.2.	Kontoere van die bergingskoëffisiënte in die Kaapse Vlakte soos vanaf 'n krigingmodel, gebaseer op 'n kleinste kwadraat latfunksie semi-variogram, verkry.	85
Figuur 3.5.3.	Driedimensionale voorstelling van die bergingskoëffisiënte in die Kaapse Vlakte.	86
Figuur 3.6.1.	Standaardafwykingskontoere van die geskatte transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte. Waardes van 100 en groter kan as duidende op onvoldoende inligting beskou word.	88
Figuur 3.6.2.	Standaardafwykingskontoere van die geskatte bergingskoëffisiënte in die Kaapse Vlakte.	89
Figuur 3.6.3.	Vyftien gekose boorgate uit die bestaande 70 boorgate in die Kaapse Vlakte.	91
Figuur 3.6.4.	Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos deur gebruikmaking van die transmissiwiteite van die 15 boorgate en kriging verkry.	92
Figuur 3.6.5.	Foutkaart van die geskatte transmissiwiteite in figuur 3.6.4.	93
Figuur 3.6.6.	Vyf-en-twintig gekose boorgate in die Kaapse Vlakte.	94
Figuur 3.6.7.	Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met behulp van kriging van die 25 gekose boorgate verkry.	95
Figuur 3.6.8.	Foutkaart van die geskatte transmissiwiteite in figuur 3.6.7.	96
Figuur 3.6.9.	Veertig gekose boorgate in die Kaapse Vlakte.	97
Figuur 3.6.10.	Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met behulp van kriging van die 40 gekose boorgate verkry.	98
Figuur 3.6.11.	Foutkaart van die geskatte transmissiwiteite in figuur 3.6.10.	99
Figuur 3.6.12.	Kontoere van die bergingskoëffisiënte soos met kriging van 15 gekose boorgate verkry.	101
Figuur 4.1.1.	Ligging van 76 boorgate in die Toppenish Creek-akwifereer.	104
Figuur 4.2.1.	Eksperimentele semi-variogram van die watervlakke in die Toppenish Creek-akwifereer.	106
Figuur 4.2.2.	Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van gewone kriging en die model $\gamma(h) = 94 h^{1,8}$ (model (a)) verkry.	108

LYS VAN FIGURE (VERVOLG)

	BLADSY
Figuur 4.2.3. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van universele kriging en die basisfunksies 1, x, y (model (b)) verkry.	109
Figuur 4.2.4. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van universele kriging en die trigonometriese basisfunksies (model (c)) verkry.	110
Figuur 4.2.5. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer met intrinsieke funksies van orde 1 (model (d)).	111
Figuur 4.2.6. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met die opbreek van die universele krigingmatriks (model (e)) verkry.	112
Figuur 4.3.1. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met die Gambolati- en Volpi-model (model (f)) verkry.	115
Figuur 4.4.1. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van die AGM verkry.	117
Figuur 4.4.2. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van tendensanalise verkry.	118
Figuur 5.1.1. Piperdiagram vir die voorstelling van die chemiese elemente teenwoordig in grondwater.	122
Figuur 5.2.1. Geologie van die Vryburg-omgewing.	124
Figuur 5.2.2. Posisies van 91 boorgate in die Vryburg-omgewing.	125
Figuur 5.2.3. Faktoranalise-resultate wat op 3 tipes grondwater dui.	126
Figuur 5.3.1. Eksperimentele kalsium semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.	127.
Figuur 5.3.2. Eksperimentele natrium semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.	128
Figuur 5.3.3. Eksperimentele bikarbonaat semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.	129
Figuur 5.3.4. Eksperimentele chloried semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.	130
Figuur 5.3.5. Eksperimentele sulfaat semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.	131

LYS VAN FIGURE (VERVOLG)

	BLADSY
Figuur 5.3.6. Eksperimentele Ca/Cl/SO ₄ (faktor 1) semi-variogram van die Vryburg-kompartement met passingsmodel.	133
Figuur 5.3.7. Eksperimentele NaHCO ₃ (faktor 2) semi-variogram van die Vryburg-kompartement met passingsmodel.	134
Figuur 5.3.8. Kalsiumkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.	135
Figuur 5.3.9. Bikarbonaatkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.	136
Figuur 5.3.10. Chloriedkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.	137
Figuur 5.3.11. Sulfaatkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.	138
Figuur 5.3.12. Die faktor Ca/Cl/SO ₄ -kontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.	139
Figuur 5.3.13. Natriumkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van universele kriging verkry.	140
Figuur 5.3.14. Die faktor NaHCO ₃ -kontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van universele kriging verkry.	141
Figuur 5.3.15. Driedimensionale voorstelling van die kalsium in die Vryburgkompartement.	143
Figuur 5.3.16. Driedimensionale voorstelling van die natrium in die Vryburgkompartement.	144
Figuur 5.3.17. Driedimensionale voorstelling van die bikarbonaat in die Vryburgkompartement.	145
Figuur 5.3.18. Driedimensionale voorstelling van die chloried in die Vryburgkompartement.	146
Figuur 5.3.19. Driedimensionale voorstelling van die sulfaat in die Vryburgkompartement.	147
Figuur 5.3.20. Driedimensionale voorstelling van faktor 1 in die Vryburgkompartement.	148
Figuur 5.3.21. Driedimensionale voorstelling van faktor 2 in die Vryburgkompartement.	149

LYS VAN FIGURE (VERVOLG)

	BLADSY
Figuur 6.2.1.	Handgravikontoere (in milligals) van die Zuurbekomkompartement soos met behulp van 1 600 graviwaardes verkry. 153
Figuur 6.2.2.	Eksperimentele semi-variogram van die graviwaardes in die Zuurbekomkompartement met 'n sferiese passingsmodel. 154
Figuur 6.2.3.	Gravikontoere van die Zuurbekomkompartement soos met behulp van gewone kriging en 81 graviwaardes verkry. 155
Figuur 6.2.4.	Gravikontoere van die Zuurbekomkompartement soos met behulp van gewone kriging en 145 graviwaardes verkry. 156
Figuur 6.3.1.	Diepte van verwering van die dolomiet in die Zuurbekomkompartement soos met behulp van kriging en 81 datapunte verkry. 157
Figuur 6.3.2.	Diepte van verwering van die dolomiet in die Zuurbekomkompartement soos met die 1 600 datapunte verkry. 158
Figuur 6.3.3.	Diepte van verwering van die dolomiet in die Zuurbekomkompartement soos met 145 datapunte en kriging verkry. 159
Figuur 6.3.4.	Verdeling van gebied in gelykverspreide intervalle ten einde numeriese integrasie uit te voer. 161
Figuur 6.3.5.	Profiel deur lyn AA in figuur 6.3.4. 162
Figuur 6.3.6.	Driedimensionale voorstelling van die diepte van verwering van die dolomiete in die Zuurbekomkompartement. Dieptes wys volgens konvensie boontoe. 164

LYS VAN TABELLE

	BLADSY	
Tabel 2.6.1.	Berekening van semi-variogramwaardes vanuit die data in figuur 2.6.1.	22
Tabel 2.8.1.	Berekening van semi-variogram vir die data in figuur 2.8.1.	42
Tabel 3.3.1.	Toetsstatistieke van die vyf semi-variogram modelle (a) sferies, (b) ah^{θ} , (c) logaritmies, (d) veralgemeende kovarians en (e) latfunksies vir die transmissiwiteite van die Kaapse Vlakte.	71
Tabel 3.4.1.	'n Vergelyking van GF vir die tendensanalise, AGM en krigingbenadering van die transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte.	81
Tabel 3.4.2.	Verskil tussen voorspelde T-waardes en eksperimentele T-waardes met (i) kriging, (ii) AGM en (iii) tendensanalise.	82
Tabel 3.5.1.	Verskil tussen voorspelde S-waardes en eksperimentele S-waardes met (i) kriging, (ii) AGM en (iii) tendensanalise.	87
Tabel 3.6.1.	Skattings van onbekende T-waardes met kriging deur gebruik te maak van (i) 70, (ii) 15, (iii) 25 en (iv) 40 boorgate se T-waardes.	100
Tabel 3.6.2.	Skattings van onbekende S-waardes met kriging deur (i) al die boorgate en (ii) 15 boorgate te beskou.	100
Tabel 4.4.1.	Die toetsstatistieke (KGF en KSS) van die modelle soos bespreek in paragrawe 4.2 en 4.3.	114
Tabel 4.4.2.	Verskil tussen die waargenome en die voorspelde watervlakke vir modelle (a) - (f) en die AGM en tendensanalise.	116
Tabel 5.3.1.	Toetsstatistieke vir die krigingmodelle vir die hidrochemiese elemente van die Vryburgkompartement.	132
Tabel 6.3.1.	Volume verveerde dolomiet tesame met die ooreenstemmende fout.	160

HOOFSTUK 1

BENADERING VAN 'N RUIMTE-AFHANKLIKE VERANDERLIKE

1.1 INLEIDING

Geohidrologiese verskynsels kan dikwels wiskundig beskryf word deur 'n ruimte-afhanklike veranderlike, gedefinieer oor 'n gegewe gebied. In die meeste gevalle van praktiese belang, is die omvang van hierdie gebied so groot dat dit net eenvoudig onmoontlik is om die veranderlike by elke punt in die gebied te bepaal, soos die wiskundige formulering vereis. Al wat prakties moontlik is, is om die grootte van so 'n verskynsel by 'n klompie punte in die gebied te bepaal en dan die waardes by ander punte te skat. Die benadering van 'n ruimte-afhanklike veranderlike speel dus 'n besondere rol in die geohidrologie.

Wiskundig gesien, bestaan daar drie basiese metodes wat afsonderlik of in kombinasie vir die doel gebruik kan word :

- (i) Die metode van kleinste kwadrate.
- (ii) Die afstandsgewegde metode.
- (iii) Die metode van interpolasie.

In hierdie hoofstuk sal die aandag veral op eersgenoemde twee metodes gevestig word. Interpolasie sal meer breedvoerig in hoofstuk 2 bespreek word.

1.2 DIE METODE VAN KLEINSTE KWADRATE (MKK)

1.2.1 ALGEMEEN

Die basiese beginsel van die metode van kleinste kwadrate is welbekend, maar sal volledigheidshalwe hier kortliks bespreek word (Burden *et al*; 1978).

Gestel dat $f(x,y)$ 'n funksie van die ruimte-veranderlikes x,y is. As $\{g_k(x,y)\}_{k=1}^n$ 'n volledige versameling van bekende funksies (algemeen bekend as basisfunksies) is, kan die funksie $f(x,y)$ ook ontwikkel word in terme van 'n oneindige reeks van die vorm (Rivlin; 1969)

$$f(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k g_k(x,y) \quad (1.2.1)$$

In die praktyk is dit natuurlik nie moontlik om die sommasie aangedui in (1.2.1) uit te voer nie. Gevolglik word 'n mens genoodsaak om die reeks na 'n eindige aantal terme, sê K , af te breek. Sodoende word daar 'n benaderde waarde

$$\hat{f}(x,y,\underline{a}) = \sum_{k=0}^K a_k g_k(x,y) \approx f(x,y) \quad (1.2.2)$$

gevind, sodanig dat

$$f(x,y) - \hat{f}(x,y,\underline{a}) = R(x,y,\underline{a}) \quad (1.2.3)$$

waar $R(x,y,\underline{a})$ bekend staan as die residu.

Veronderstel dat $\{f(x_i,y_i)\}_{i=1}^n$ 'n versameling bekende waardes van $f(x,y)$ by die punte (x_i,y_i) is, met $n > K+1$. Die MKK ontstaan wanneer daar geëis word dat die som

$$S = \sum_{i=1}^n [R(x_i,y_i,\underline{a})]^2 \quad (1.2.4)$$

so klein as moontlik is. Aangesien S 'n kwadratiese funksie van die a_k is, kan daar altyd aan hierdie eis voldoen word, indien die a_k so gekies word dat

$$D_{aj} S = 0 \quad (k=0, \dots, K) \quad (1.2.5)$$

Indien R in (1.2.4) vervang word met sy uitdrukking in (1.2.3) en die resultaat word in (1.2.5) gestel, ontstaan die sogenaamde normaalvergelykings

$$\sum_{k=0}^K a_k \sum_{i=1}^n g_k(x_i, y_i) g_j(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) g_j(x_i, y_i) \quad (j=0, 1, \dots, K) \quad (1.2.6)$$

Hierdie stel van K lineêre vergelykings kan sodra die $g_j(x, y)$ gekies is, gebruik word om die K onbekendes a_k te bepaal.

1.2.2 TENDENSANALISE

Die bekendste kleinste kwadraatbenadering is waarskynlik die polinomiese benadering ook bekend as tendensanalise. Hierdie benadering ontstaan wanneer $g_j(x, y)$ gekies word uit die versameling van polinome

$$P_k(x, y) = x^\mu y^\nu \quad (\mu + \nu = k)$$

Alhoewel hierdie metode baie eenvoudig is om toe te pas, het dit een besondere nadeel, dit is dat die koëffisiëntmatriks in (1.2.6) sleggeaard word vir groot waardes van K . Dit is dus gebruiklik om wanneer die tegniek toegepas word, K se waarde klein te hou. ('n Gewilde keuse is $K = 4$).

'n Ander nadeel van die metode is die onvermoë van polinome om vinnig veranderende funksies, soos byvoorbeeld stapfunksies, getrou te benader. As daar dus niks omtrent die funksie $f(x, y)$ bekend is nie, mag dit dalk beter wees om die Fourierbenadering te gebruik.

1.2.3 DIE FOURIERBENADERING

Die Fourierbenadering word verkry deur $g_k(x,y)$ identies aan 'n kombinasie van die trigonometriese funksies $\sin(\mu\pi x/L_1)$ en $\cos(\nu\pi x/L_2)$ ($0 \leq x \leq L_1$, $0 \leq y \leq L_2$) te stel. Die presiese kombinasie wat gebruik word, word gewoonlik bepaal deur die simmetrie eienskappe van $f(x,y)$ in ag te neem. As $f(x,y)$ byvoorbeeld antisimetries is, d.w.s.

$$f(x,y) = -f(-x,y) = -f(x,-y) = f(-x,-y)$$

is 'n gerieflike keuse

$$g_k(x,y) = \sin(\mu\pi x/L_1)\sin(\nu\pi y/L_2) \quad (1.2.7)$$

Vir 'n ewe $f(x,y)$ is

$$g_k(x,y) = \cos(\mu\pi x/L_1)\cos(\nu\pi y/L_2) \quad (1.2.8)$$

weer die geskikste keuse. As $f(x,y)$ geen simmetrie eienskappe besit nie, is die geskikste keuse die versameling van funksies in (1.2.7) en (1.2.8) asook

$$g_k(x,y) = \sin(\mu\pi x/L_1) \cos(\nu\pi y/L_2) \quad (1.2.9)$$

1.3 AFSTANDSGEWEEGDE METODEDES (AGM)

As daar aanvaar word dat die funksie $f(x,y)$ nie baie vinnig verander oor klein afstande binne sy gebied van definisie nie, is dit geregverdig om te aanvaar dat die waarde van $f(x_0,y_0)$ 'n noue verband behoort te vertoon met waardes van $f(x,y)$ by punte (x_k,y_k) in sy omgewing. In die besonder kan verwag word dat hoe nader (x_j,y_j) aan (x_0,y_0) lê, hoe beter word $f(x_0,y_0)$ deur $f(x_j,y_j)$ benader, want dit is seer sekerlik waar dat

$$\lim_{x_0 \rightarrow x_j, y_0 \rightarrow y_j} f(x_0, y_0) \equiv f(x_j, y_j)$$

Dit is die basis van die AGM.

Die eenvoudigste AGM bestaan daaruit dat $f(x_0, y_0)$ benader word deur 'n lineêre kombinasie van die $f(x_i, y_i)$ in sy onmiddellike omgewing. Die eenvoudigste vorm van so 'n benadering is

$$f(x_0, y_0) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i)$$

waar w_i 'n gewigsfunksie is wat slegs afhang van die afstand

$$d_{i0} = \sqrt{(x_i - x_0)^2 + (y_i - y_0)^2}$$

In die praktyk bestaan daar 'n verskeidenheid van hierdie gewigsfunksies, byvoorbeeld $1/d_{i0}$, $1/d_{i0}^m$ ($m \geq 2$), $\exp(-d_{i0})$.

Die basiese beginsels van die AGM kan natuurlik ook op die MKK toegepas word. Al wat hiervoor benodig word, is om die S in (1.2.4) te herdefinieer as

$$S = \sum_{i=1}^n [R(x_i, y_i, \underline{a})]^2 w_i$$

Die normaalvergelykings word dan gegee deur

$$\sum_{k=0}^K a_k \sum_{i=1}^n w_i g_k(x_i, y_i) g_j(x_i, y_i) = \sum_{i=1}^n w_i f(x_i, y_i) g_j(x_i, y_i) \quad (1.3.1)$$

'n Besondere interessante toepassing van die afstandsgeweege kleinste kwadraatbenadering (AGKKB) is dié voorgestel deur McLain (1974). Hier word $\hat{f}(x, y, \underline{a})$ gekies as 'n polinoom van 'n lae graad, byvoorbeeld

$$\hat{f}(x, y, \underline{a}) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy + a_4 x^2 + a_5 y^2$$

en die koëffisiënte a_k bepaal word vir elke gegewe (x_0, y_0) met behulp van (1.3.1). Hierdie metode het miskien die nadeel teenoor tendensanalise dat 'n nuwe $\hat{f}(x, y, \underline{a})$ bepaal moet word vir elke (x_0, y_0) . In die praktyk word egter gevind dat hierdie benadering oor die algemeen beter skattings as tendensanalise lewer.

HOOFSTUK 2

DIE TEORIE VAN KRIGING

2.1 ALGEMEEN

Een van die bekendste wiskundige metodes vir die benadering van 'n funksie $f(x)$ gegee in versameling van getalle $\{f(x_i)\}_{i=0}^n$ is interpolasie. In sy eenvoudigste vorm kom die metode daarop neer dat daar gesoek word na 'n polinoom van graad n , $P_n(x)$ sê, wat so is dat

$$P_n(x_i) = f(x_i)$$

Die bekendste van hierdie polinome is sekerlik die lineêre Lagrange polinoom gedefinieer deur (Botha en Pinder; 1983)

$$P_1(x) = \ell_i(x)f(x_i) + \ell_{i+1}(x)f(x_{i+1})$$

waar

$$\ell_i(x) = (x - x_{i+1})/(x_i - x_{i+1}), \ell_{i+1}(x) = (x - x_i)/(x_{i+1} - x_i)$$

Die wesentlike verskil tussen die interpolasie-metode en die ander metodes, vroeër bespreek, is hoofsaaklik daarin geleë dat $P(x_i)$, $f(x_i)$ eksak benader. Verder is dit ook moontlik om 'n redelike akkurate skatting te maak van die fout wat voorkom in $P(x_j)$ indien $x_j \neq x_i$ (Botha; 1979).

Die interpolasie-metode kan gereedlik maklik na twee en meer dimensies uitgebrei word (Botha en Pinder; 1983). Tog word dit selde, indien ooit, by die opstel van kontoerkaarte en aanverwante probleme gebruik. Die redes hiervoor is kortliks die volgende :

- (a) In teenstelling met wat 'n mens in die algemeen sou verwag, is dit nie noodwendig waar dat

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \rightarrow f(x)$$

Die gevolg is dat 'n mens 'n interpolasie-polinoom kan genereer wat vir punte weg van die knooppunte $\{x_i\}$ nie met die gegewe funksie ooreenstem nie (Stroud; 1974).

- (b) Die interpolasie-polinoom hoef nie noodwendig in twee of meer dimensies te bestaan nie (Prenter; 1975).

Uit 'n praktiese oogpunt sou dit dus voordelig wees indien 'n metode gevind kan word wat die basiese eienskappe van interpolasie (die eksakte weergawe van die funksie by die knooppunte en 'n goeie skatting van die fout by ander punte) besit en terselfdertyd ook die probleme ondervind met metodes bespreek in hoofstuk 2, kan beperk. So 'n metode is die metode van kriging.

Hierdie metode ontwikkel deur die Franse ingenieur, G. Matheron, in die vroeëre sestigjare (Matheron; 1963) is gebaseer op 'n idee oorspronklik voorgestel deur die Suid-Afrikaanse geoloog-statistikus, D.G. Krige (1951), vandaar ook die benaming kriging.

Oorspronklik het die metode slegs toepassing gevind by die mynbou, maar in die afgelope aantal jare is dit ook in ander rigtings toegepas. Enkele voorbeelde van sulke toepassings is byvoorbeeld die werk van Huijbregts en Matheron (1970) op gravitasie anomalieë, ondersese kartering (Journal; 1969), bosbou (Poissonet *et al*; 1970) en natuurlik ook mynbou (Krige; 1978).

Gegronde op hierdie resultate, wil dit voorkom asof kriging 'n belangrike rol in geohidrologiese toestande kan speel. Daar is gevolglik besluit om 'n meer diepgaande ondersoek na die gebruik van die metode in geohidrologie in te stel. So 'n ondersoek vereis nie net die toepassing van die metode nie, maar ook 'n kennis van die huidige stand in sy teoretiese ontwikkeling. Hierdie hoofstuk sal gevolglik aan 'n bespreking van die teorie van kriging gewy word.

2.2 DEFINISIES

2.2.1 DIE BEGRIP RUIMTE-AFHANKLIKE VERANDERLIKE (RAV)

Inherent aan kriging is die begrip RAV. So 'n RAV kan wiskundig voorgestel word deur die simbool $Z(x)$ waar die ruimte-afhanklikheid aangedui word deur die posisie vektor x in plaas van die meer gebruiklike ruimtelike koördinate. Die funksie $Z(x_i)$ is dus niks anders as 'n funksie gedefinieer oor 'n gebied

$$G : Z(x) = \{ Z(x_i), \} \quad x_i \in G$$

met die volgende eienskappe :

- (a) By elke punt $x_i \in G$ bestaan daar 'n realisasie (waarneembare grootte) $z(x_i)$.
- (b) Die waardes $z(x)$ en $z(x + h)$ is autokorreleerbaar en hierdie korrelasie hang slegs af van die afstandsvektor h tussen die twee punte.

2.2.2 STATISTIESE BEGRIPPE

Waar die MKK en AGM gebruik maak van die werklike posisie om 'n benadering van die funksie daar te stel, berus kriging hoofsaaklik op die

autokorrelasie tussen $z(x)$ en $z(x + h)$. Statistiese begrippe speel dan ook 'n belangrike rol in die teorie.

Een van die grondliggende begrippe in die wiskundige statistiek is seker die van verwagtingswaarde $m(z)$. Hierdie grootte wat 'n getal is, word gewoonlik wiskundig gedefinieer deur

$$m(z) = E[z] \quad (2.2.1)$$

waar $E[\cdot]$ 'n lineêre operator is, d.w.s. as ω enige konstante is, dan geld

$$\begin{aligned} E[x + y] &= E[x] + E[y] \\ E[\omega] &= \omega \\ E[\omega x] &= \omega E[x] \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Hieruit volg dat

$$E[E[x]] = E^2[x] = E[m(x)] = m(x)$$

Ander begrippe wat ook 'n belangrike rol speel en in terme van die verwagtingswaarde gedefinieer kan word, is die kovarians gedefinieer deur

$$\sigma_{xy} \equiv \text{kov}[xy] = E[(x - E[x])(y - E[y])], \quad (2.2.3)$$

varians

$$\sigma_x^2 \equiv \text{var}[x] = E[(x - E[x])^2] \quad (2.2.4)$$

en korrelasiekoëffisiënt

$$r_{xy} = \text{kov}[xy] / \sigma_x \sigma_y \quad (2.2.5)$$

Om aan hierdie redelik abstrakte begrippe betekenis te gee, word daar in die statistiek gebruik gemaak van sogenaamde skatters. Gestel daar bestaan

n waarnemings van x en y , naamlik $\{x_i, y_i\}_{i=1}^n$. Die skatter van $E[x]$ word dan gedefinieer as

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (2.2.6)$$

Soortgelyk word die skatter van σ_x^2 gegee deur

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (2.2.7)$$

en dié van σ_{xy} deur

$$S_{xy} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \quad (2.2.8)$$

Let op dat al hierdie skatters die waargenome groottes op presies dieselfde wyse in ag neem. Derhalwe word gesê dat hulle onsydig is.

2.3 DIE KOVARIANS- EN KORRELASIEDIAGRAMME

Die kovarians tussen $z(x)$ en $z(x+h)$ word volgens (2.2.3) gegee deur (kyk ook Rendu; 1978)

$$c(h) = E[(z(x) - E[z(x)])(z(x+h) - E[z(x+h)])] \quad (2.3.1)$$

As h 'n kontinue veranderlike is, kan $c(h)$ grafies voorgestel word deur 'n kromme bekend as die kovariansdiagram. Net so word die korrelasiediagram $r(h)$ gegee deur :

$$r(h) = \frac{c(h)}{c_1 c_2} \quad (2.3.2)$$

waar $c_1 = \sigma_x$ en $c_2 = \sigma_{x+h}$

Indien $h = 0$ is $c(h) =$ varians van x , sodat $r(0) = 1$. Die maksimumwaarde wat $r(h)$ dus kan aanneem, is 1. Dit beteken dat indien dit moontlik sou

wees om twee identiese monsters op presies dieselfde plek te neem sonder enige monsternemingsfout, die monsters dieselfde waarde moet hê. Weens monsterroute en mikrovariasies gebeur dit egter nie altyd in die praktyk nie. Die gevolg is dat die kovarians- en korrelasiediagram dikwels 'n afwyking van die verwagte waarde by die oorsprong toon. Hierdie verskynsel word na aanleiding van die feit dat daar dikwels in die goudmynbedryf op 'n klont goud afgekom word, die klonteffek (nugget effect) genoem. Dit word gewoonlik aangedui met die simbool C_0 en gedefinieer deur

$$C_0 = \sigma_x^2 - \lim_{h \rightarrow 0} c(h) \quad (2.3.3)$$

Die kovarians- en korrelasiediagramme word gewoonlik bereken uit $n(h)$ monsterpare $[z(x_i), z(x_i + h)]$ met behulp van die skatters

$$c(h) = \frac{1}{n(h) - 1} \sum_{i=1}^{n(h)} [z(x_i) - x_1] [z(x_i + h) - x_2]$$

$$\text{en } r(h) = \frac{c(h)}{S_1 S_2}$$

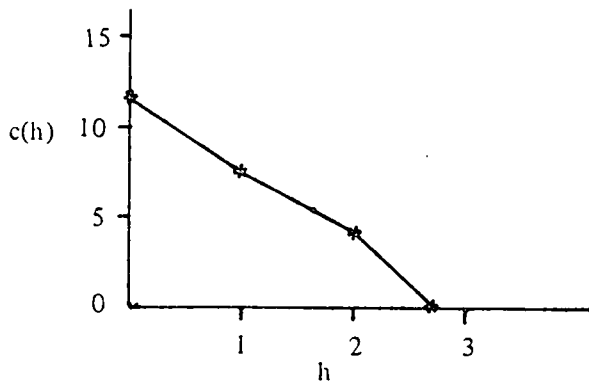
waar $x_1 = \bar{z}(x_i)$; $x_2 = \bar{z}(x_i + h)$; $S_1 = S_x(x_i)$ en $S_2 = S_y(x_i + h)$ bereken. Hoe dit in die praktyk gedoen word, sal later meer volledig bespreek word. Hier sal daar volstaan word met enkele voorbeelde van sulke kovarians- en korrelasiediagramme in figure 2.3.1 en 2.3.2.

2.4 DIE VARIOGRAM EN SEMI-VARIOGRAM

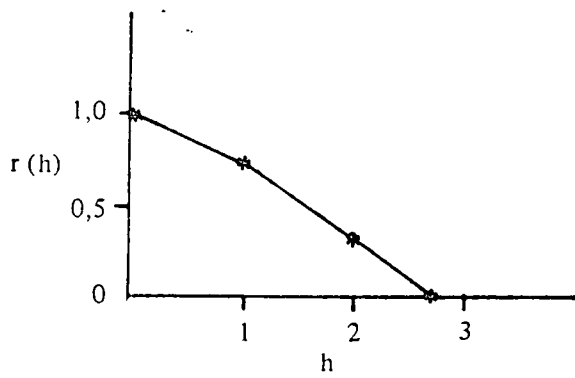
2.4.1 DEFINISIE

By die praktiese toepassing van kriging is dit gerieflik gevind om die verband tussen twee monsterwaardes op 'n afstand h van mekaar te beskryf met behulp van die variogram eerder as die kovariansdiagram. Hierdie entiteit, ingevoer deur Matheron (1971), word gedefinieer deur die vergelyking

$$2 \gamma(h) = E[z(x) - z(x + h)]^2 \quad (2.4.1)$$



Figuur 2.3.1. Algemene vorm van 'n kovariansdiagram.

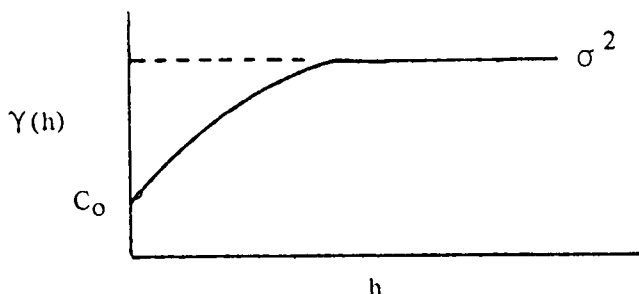


Figuur 2.3.2. Algemene vorm van 'n korrelasiediagram.

Na die grootte $\gamma(h)$ in hierdie vergelyking, word verwys as die semi-variogram. 'n Geskikte skatter van die semi-variogram word gegee deur :

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n(h)} \sum_{i=1}^{n(h)} (z(x_i) - z(x_i + h))^2 \quad (2.4.2)$$

'n Voorbeeld van so 'n semi-variogram word in figuur 2.4.1 getoon.



Figuur 2.4.1. Algemene vorm van 'n semi-variogram.

'n Begrip wat 'n besondere rol in kriging speel, is die sogenaamde tweede-orde stasionêre veranderlike. So 'n veranderlike word gekenmerk deur twee eienskappe (Journel en Huijbregts; 1978) :

- (i) die verwagte waarde van $z(x)$ is onafhanklik van punt x , d.w.s.

$$E[z(x)] = m \quad \forall x \quad (2.4.3)$$

- (ii) vir elke paar $(z(x), z(x+h))$ bestaan die kovarians

$$c(h) = E[(z(x+h) - m)(z(x) - m)] \quad (2.4.4)$$

en is dit slegs van h afhanklik.

Die eerste voorwaarde vereis dat daar geen polinomiese neiging in die waardes voorkom nie, terwyl die tweede impliseer dat die varians bestaan en stasionêr is.

Hieruit volg dat

$$\text{Var } z(x) = \sigma^2 = c(0) \quad \forall x$$

Deur gebruik te maak van hierdie vergelyking, (2.4.1), (2.4.3) en (2.4.4) volg

$$\begin{aligned} \gamma(h) &= E[(z(x+h) - z(x))^2] \\ &= \frac{1}{2} E[((z(x+h) - m) - (z(x) - m))^2] \\ &= \frac{1}{2} E[(z(x+h) - m)^2 - 2(z(x+h) - m)(z(x) - m) + (z(x) - m)^2] \\ &= \sigma^2 - c(h) \end{aligned} \tag{2.4.5}$$

In baie gevalle bestaan 'n eindige varians nie (bv. die Witwatersrandse Goudvelde, Krige; 1951). Die inkrement $z(x) - z(x+h)$ besit egter wel 'n varians. So 'n ruimte-afhanklike veranderlike moet aan die volgende twee voorwaardes, ook bekend as die intrinsieke hipotese, voldoen :

- (i) die verwagte waarde van die verskil $z(x) - z(x+h)$ is onafhanklik van punt x maar wel die h

$$E[z(x) - z(x+h)] = m(h)$$

- (ii) die semi-variogram is onafhanklik van die punt x vir alle afstande h

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} E[z(x) - z(x+h)]^2$$

Die eerste voorwaarde impliseer dat die veranderlike hoogstens 'n lineêre tendens besit. Wanneer die intrinsieke hipotese geld, staan die kriging-metode bekend as gewone kriging. In alle ander gevalle moet daar gebruik gemaak word van universele kriging.

2.4.2 EIENSKAPPE VAN DIE SEMI-VARIOGRAM

Dit volg vanaf (2.4.5) dat vir waardes van h sodanig dat $z(x)$ en $z(x+h)$ geen korrelasie toon nie, die semi-variogram streef na 'n konstante $C + C_0$ waar $C = \lim_{h \rightarrow 0} c(h)$ (kyk (2.3.3)). Die C wat op hierdie manier ingevoer is, word die drumpel (sill) genoem (David; 1977). Die afstand waar $\gamma(h)$ hierdie konstante waarde bereik, word die strekking, a (range) van die semi-variogram genoem. Hierdie eienskappe van die semi-variogram word grafies voorgestel in figuur 2.4.2. Die verband tussen 'n semi-variogram wat 'n drumpel besit en die kovariansdiagram word gegee deur (kyk figuur 2.4.3).

$$\gamma(h) = \sigma^2 - c(h)$$

2.5 KRIGING ONDER DIE INTRINSIEKE HIPOTESE

2.5.1 INLEIDING

Laat x_1, x_2, \dots, x_n die posisie van n monsterpunte wees en laat $Z_i = Z(x_i)$ die waarde van die monster by punt x_i wees. Die probleem is nou om die waarde Z_0 by 'n willekeurige punt x_0 te bereken. By die bespreking van die MKK en AGM is hierdie probleem oorkom deur te aanvaar dat daar 'n funksie daargestel kan word wat aan sekere voorwaardes voldoen. Dieselfde tegniek kan ook in die geval van kriging onder die intrinsieke hipotese gebruik word. Die voorwaardes wat hier gebruik word, is :

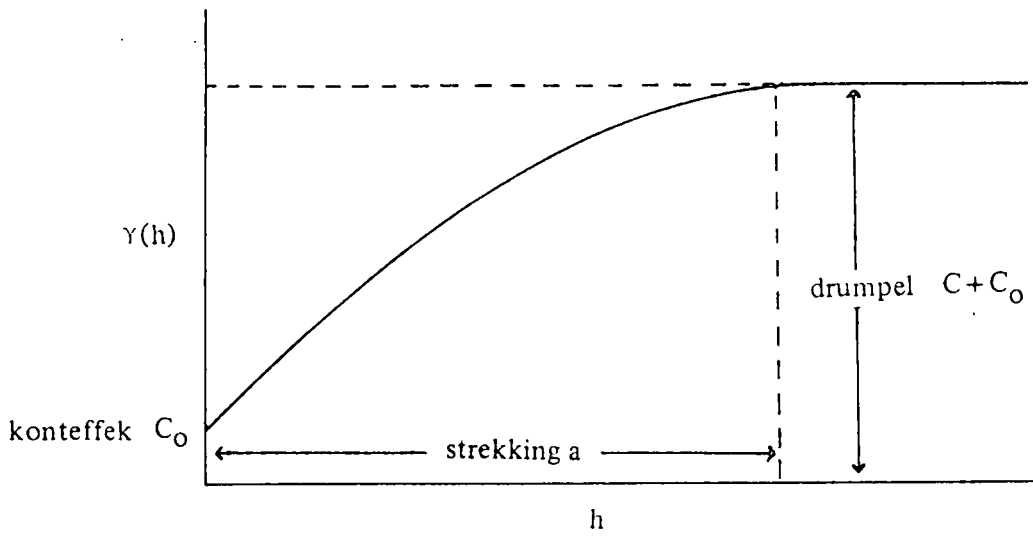
- (i) Die benadering moet maklik berekenbaar wees. Aan hierdie voorwaarde kan voldoen word indien die beramer Z^* van Z_0 'n lineêre som van Z_i is :

$$Z^* = \sum_{i=1}^n a_i Z_i \quad (2.5.1)$$

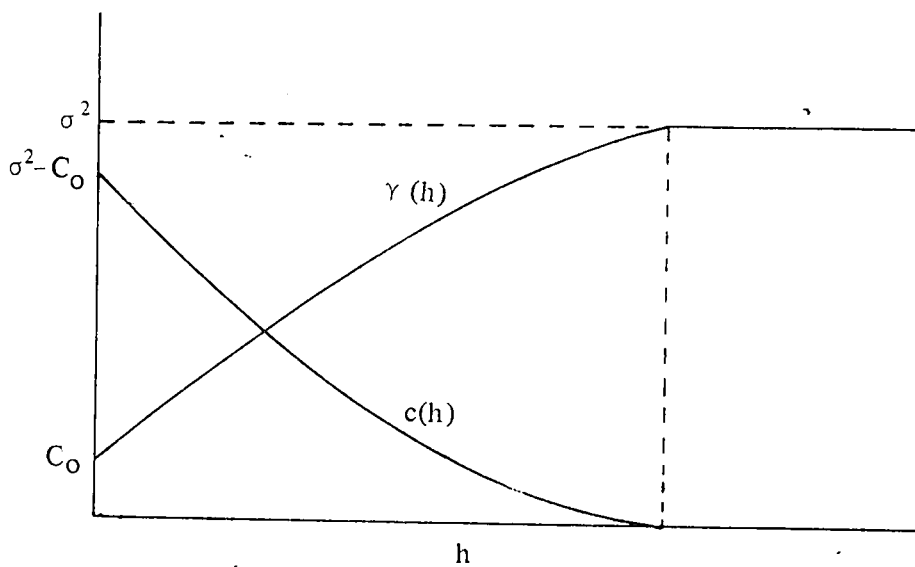
waar a_i = gewigte is wat aan 'n punt x_i toegeken word en wat bereken moet word.

- (ii) Die beramer Z^* moet onsydig wees, d.w.s.

$$E[Z^* - Z_0] = 0 \quad (2.5.2)$$



Figuur 2.4.2. Voorstelling van die drumpel, klonteffek en strekking van 'n semi-variogram.



Figuur 2.4.3. Verband tussen die kovariansdiagram en semi-variogram.

(iii) Die gemiddelde fout kwadraat van die beramer moet 'n minimum wees :

$$E[(Z^* - Z_0)^2] = \text{minimum} \quad (2.5.3)$$

'n Beramer wat aan hierdie vereistes voldoen, word in die literatuur na verwys as 'n BLUE (best linear unbiased estimator). Hier sal na die term as 'n GLOB (geskikte lineêre onpartydige beramer) verwys word. Die ooreenstemmende beramingsfout word die beramingsvarians of krigingsfout genoem.

2.5.2 KRIGING INDIEN DIE GEMIDDELDE EN DIE KOVARIANS BEKEND IS

Indien die gemiddelde en kovarians van 'n sekere versameling van data bekend is, kan die metode van kriging soos volg toegepas word. Beskou die veranderlike gedefinieer deur

$$Y(x) = Z(x) - m$$

sodat $E[Y] = 0$ (2.5.4)

Volgens (2.5.1) word die waarde van Y by 'nige punt x_0 dan gegee deur :

$$Y^* = Y^*(x_0) = \sum_{i=1}^n a_i Y_i \quad (2.5.5)$$

Die uitdrukking $E[(Y^* - Y_0)^2]$ kan met behulp van (2.5.3), (2.2.2), (2.5.4) en (2.5.5) ook geskryf word as :

$$\begin{aligned} E[(Y^* - Y_0)^2] &= E[(\sum_i a_i Y_i - Y_0)^2] \\ &= E[(\sum_i a_i Y_i)(\sum_i a_j Y_j)] \\ &\quad - 2 E[\sum_i a_i Y_i Y_0] + E[Y_0^2] \\ &= \sum_i \sum_j a_i a_j E[Y_i Y_j] - 2 \sum_i a_i E[Y_i Y_0] + E[Y_0^2] \end{aligned}$$

Vanaf (2.2.3), (2.5.4) en (2.2.2) volg egter dat

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= E[(Y_i - m)(Y_j - m)] \\ &= E[Y_i Y_j]\end{aligned}$$

$$\text{Dus } E[(Y^* - Y_0)^2] = \sum_i \sum_j a_i a_j c_{ij} - 2 \sum_i a_i c_{i0} + c(0) \quad (2.5.6)$$

$$\text{waar } c(0) = E[Y_0^2]$$

Hierdie funksie bereik 'n ekstreme waarde waar sy afgeleides met betrekking tot a_i gelyk is aan nul (Journel en Huijbregts; 1978); d.w.s. waar

$$\frac{\partial}{\partial a_i} E[(Y^* - Y_0)^2] = 2 \sum_j a_j c_{ij} - 2c_{i0} = 0$$

Hierdie is 'n lineêre stelsel van n vergelykings in die n onbekendes :

$$\sum_j a_j c_{ij} = c_{i0} \quad , \quad i = 1, \dots, n \quad (2.5.7)$$

wat in matriksnotasie ook geskryf kan word in die vorm

$$C \cdot \underline{a} = \underline{b} \quad (2.5.8)$$

waar die elemente van C , \underline{a} en \underline{b} gegee word deur

$$c_{ij} = \sigma_{ij} \quad , \quad a_i = a_i \quad \text{en} \quad b_i = c_{i0}$$

As die omgekeerde van die matriks C bestaan, kan (2.5.8) gebruik word om vir die a_i op te los.

Die fout wat met hierdie beraming gemaak word, kan maklik in terme van die varians uitgedruk word. Dit volg naamlik vanaf (2.5.6) en (2.5.7) dat

$$\text{Var} [Y^* - Y_0] = - \sum_i a_i c_{i0} + c(0)$$

Sodra die a_i dus bekend is, kan $\text{Var}[Y^* - Y_0]$ dus 'n aanduiding van die fout in die geskatte waarde maklik bepaal word. Aangesien die gemiddelde selde, indien ooit, bekend is, word die voorafgaande prosedure maar min prakties toegepas. Soos in die volgende paragraaf aangetoon sal word, kan kriging egter nog steeds toegepas word, selfs al is die gemiddelde m onbekend.

2.5.3 KRIGING INDIEN DIE GEMIDDELDE ONBEKEND IS

Die basiese verskil tussen kriging van 'n stel data waar die gemiddelde m bekend en die waarde m onbekend is, is daarin geleë dat eersgenoemde stel data die voorwaarde (2.5.2) outomaties bevredig. Al wat dus nodig is in laasgenoemde geval, is om te eis dat hierdie data ook (2.5.2) moet bevredig. Volgens (2.5.1) en (2.5.2) sal dit waar wees as

$$E[\sum a_i Z_i] - E[Z_0] = 0$$

d.w.s. (kyk (2.2.1) en (2.2.2) as $\sum_i a_i m = m$

Die onsydige voorwaarde lê dus een beperking op die a_i 's, naamlik :

$$\sum_i a_i = 1 \quad (2.5.9)$$

Om die a_i 's te bereken, kan daar nou weer eens soos vantevore te werk gegaan word. Eerstens word daar geëis dat

$$\begin{aligned} E[(Z^* - Z_0)^2] &= \sum_i \sum_j a_i a_j E(Z_i Z_j) - 2 \sum_i a_i E[Z_i Z_0] + E[Z_0^2] \\ &= \text{minimum} \end{aligned}$$

Vir 'n tweede-orde stasionêre veranderlike geld volgens (2.4.3) en (2.4.4).

$$E[Z_i Z_j] = \sigma_{ij} + m^2$$

d.w.s.

$$E[Z_0^2] = c(0) + m^2$$

Dus

$$\begin{aligned}
 E[(Z^* - Z_0)^2] &= \sum_i \sum_j a_i a_j c_{ij} - 2 \sum_i a_i c_{i0} + c(0) + m^2 \left(\sum_i \sum_j a_i a_j - 2 \sum_i a_i + 1 \right) \\
 &= \sum_i \sum_j a_i a_j c_{ij} - 2 \sum_i a_i c_{i0} + c(0) \qquad (2.5.10)
 \end{aligned}$$

volgens (2.5.9)

Hierdie kwadratiese funksie kan weer eens soos hierbo geminimeer word. Dit moet egter in gedagte gehou word dat die a_i 's ook (2.5.9) moet bevredig. Om aan hierdie voorwaarde te voldoen, is dit gerieflik om 'n Lagrange vermenigvuldiger μ (kyk David; 1977) in te voer en in plaas van die uitdrukking regs in (2.5.10) liewers die uitdrukking

$$\sum_i \sum_j a_i a_j c_{ij} - 2 \sum_i a_i c_{i0} + c(0) + 2\mu \left(\sum_i a_i - 1 \right)$$

te minimeer.

Deur nou afgeleides met betrekking tot die a_i 's en μ te neem en gelyk aan nul te stel, word 'n stelsel van $(n + 1)$ vergelykings in $(n + 1)$ onbekendes verkry, naamlik :

$$\begin{aligned}
 \sum_j a_j c_{ij} + \mu &= c_{i0} \\
 \sum_i a_i &= 1 \qquad (2.5.11)
 \end{aligned}$$

Die beramingsvarians of krigingfout word in hierdie geval gegee deur

$$c_k^2 = \text{Var}(Z^* - Z_0) = c(0) - \sum_i a_i c_{i0} - \mu$$

In eksplisiete matriksvorm sien hierdie krigingstelsel-vergelykings soos volg daaruit :

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \dots \\ c_{n0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.12)$$

of kortweg $C \cdot \underline{c} = \underline{b}$.

Sodra \underline{c} bepaal is uit (2.5.12), kan die waarde van Z^* bereken word met behulp van (2.5.1).

Die krigingsstelsel het 'n unieke oplossing, as en slegs as die determinant van die kovariansmatriks bestaan, d.w.s. $\det C > 0$. Dit sal die geval wees as die kovariansfunksie $c(h)$ positief definitief is en geen datapunt volkome met 'n ander datapunt ooreenstem nie (Journel en Huijbregts; 1978).

Indien die punt x_0 ooreenstem met 'n eksperimentele punt, dan lewer kriging

- (i) 'n beramer Z^* wat onsydig is, en
- (ii) 'n beramingsvarians $c_k^2 = 0$.

Die stelsel van lineêre vergelykings (2.5.12) is hierbo beskryf in terme van die kovariansmatriks. Dit kan egter ook met behulp van (2.5.8) en (2.4.5) in terme van die semi-variogramfunksie $\gamma(h)$ geskryf word in die vorm

$$\begin{pmatrix} 0 & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} & 1 \\ \gamma_{21} & 0 & \dots & \gamma_{2n} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1} & \gamma_{n2} & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_{10} \\ \gamma_{20} \\ \dots \\ \gamma_{n0} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (2.5.13)$$

Uit die voorafgaande bespreking volg dat, aangesien die punt x_0 enige willekeurige punt in 'n gegewe gebied kan wees, kriging slegs suksesvol toegepas kan word indien $\gamma(h)$ of $c(h)$ as 'n funksie van h bekend is vir alle waardes van h . Hoe aan hierdie voorwaarde in die praktyk voldoen kan word, sal in die volgende paragraaf bespreek word.

2.6 BEREKENING VAN SEMI-VARIOGRAM

2.6.1 ALGEMEEN

Fisiese verskynsels tree altyd na vore in die vierdimensionale ruimte-tyd-kontinuum. Daar is egter baie verskynsels waarin die tyd nie 'n rol speel nie. Sulke verskynsels kan dan wiskundig beskryf word deur 'n veranderlike wat slegs afhanklik is van die driedimensionale ruimtekontinuum. In baie praktiese gevalle is dit egter nie altyd maklik om so 'n veranderlike volledig in die ruimtekontinuum te bepaal nie (dink byvoorbeeld aan die geval van die transmissiwiteit van 'n akwifereer). Om hierdie rede en ook omdat 'n een- of tweedimensionale voorstelling van so 'n veranderlike dikwels voldoende is, sal daar in hierdie bespreking slegs stilgestaan word by die berekening van een- en tweedimensionale semi-variogramme.

2.6.2 DIE EENDIMENSIONALE GEVAL

As eenvoudige voorbeeld van die berekening van 'n eendimensionale semi-variogram sal daar nou gekyk word na die diskreet verspreide monsterwaardes in figuur 2.6.1. In hierdie geval kan die berekening betreklik maklik met behulp van (2.4.2) deurgevoer word. Al wat nodig is, is om bloot net die data te groepeer in geskikte intervalle soos getoon in tabel 2.6.1.

TABEL 2.6.1. BEREKENING VAN SEMI-VARIOGRAMWAARDES VANUIT DIE DATA IN FIGUUR 2.6.1

h	0	1	2	3
$n(h)$	10	7	6	6
$\gamma(h)$	0	11,4	32,6	54,6

Daarna kan die waardes van $\gamma(h)$ bereken word. Hierdie waardes word grafies voorgestel in figuur 2.6.2.

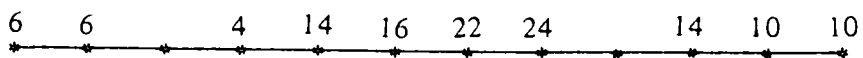
Fisiese data vertoon selde 'n diskrete verspreiding soos die in figuur 2.6.1. Van veel groter belang is waar waarnemings van 'n kontinue veranderlike slegs bekend is by 'n aantal nie-gelykverspreide punte (kyk figuur 2.6.3). Hier mag dit dalk voordelig wees om eers die data te groepeer in n intervale van sê $x_0 + \Delta x, x_1 + \Delta x, \dots$ en dan die gemiddelde of een of ander geweege waarde te gebruik as verteenwoordigend van die groep. Die berekening van die semi-variogram kan weer eens gedoen word soos in die geval van diskreet verspreide data.

2.6.3 DIE TWEEDIMENSIONALE GEVAL

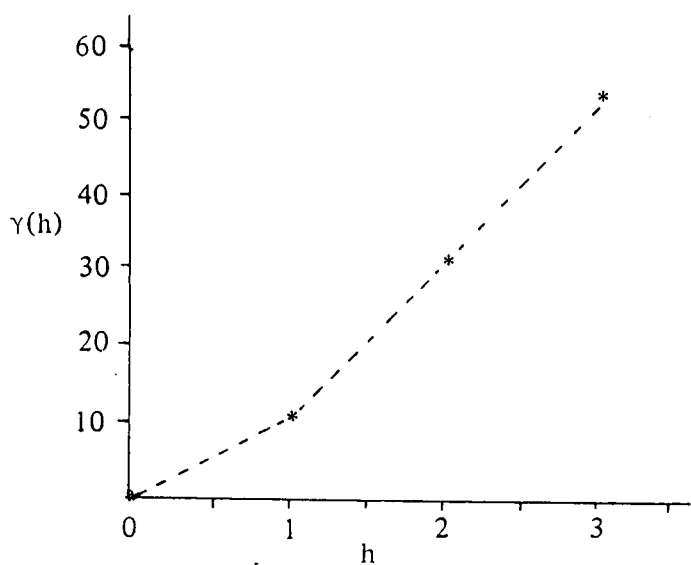
Soos so dikwels in die wiskundige beskrywing van fisiese gebeurtenisse gebeur, raak so 'n beskrywing al hoe moeiliker sodra daar oorgegaan word na die tweedimensionale geval. Dit geld ook in die berekening van die semi-variogram.

Fisiese groottes kan, sover dit hul ruimte-afhanklikheid aanbetref, in drie klasse verdeel word : skalare, vektore en tensore. Skalare groottes word gekenmerk deur die eienskap dat hul waardes nie deur rigting beïnvloed word nie. Voorbeelde van sulke groottes is massa, temperatuur en die bergingskoëffisiënt van 'n akwifer. Vektoriële en tensoriële vertoon aan die anderkant 'n duidelike rigtingsafhanklikheid. Voorbeelde hiervan is snelheid, krag en die transmissiwiteit van 'n akwifer. Dit gebeur dikwels in die geval van tensoriële groottes dat so 'n grootte nie sy rigtingsafhanklikheid vertoon nie. In sulke gevalle word gesê die medium is isotroop, anders is dit anisotroop.

Waargenome waardes van een of ander fisiese grootte wat op sigself nie 'n tensoriële grootte is nie, vertoon dikwels, om verskillende redes, 'n gedrag soortgelyk aan die van 'n tensor. Daarom word daar na hierdie verskynsel

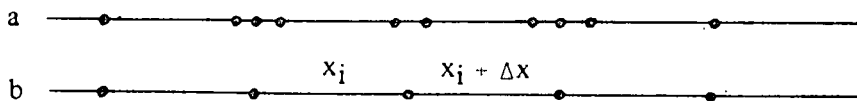


Figuur 2.6.1. Monsterwaardes langs 'n lyn.



Figuur 2.6.2. Eksperimentele semi-variogram van die waardes in figuur 2.6.1.

Die stippellyn het geen ander doel as 'n gids vir die oog nie.



Figuur 2.6.3. Nie-gelykverspreide data (a) voor groepering en (b) na groepering.

ook verwys as anisotropie. Om egter onderskeid tussen die twee tipes anisotropie te maak, word daar na 'n egte tensorgrootte verwys as sonale anisotropie en na die ander geval as ruimtelike of geometriese anisotropie. 'n Geometriese anisotropie word gewoonlik daardeur gekenmerk dat sy variasie tussen twee punte wat 'n afstand h vanmekaar geleë is in een rigting ekwivalent is aan die variasie tussen twee punte wat k keer die afstand h vanmekaar is. In hierdie geval kan die semi-variogram na 'n isotropie semi-variogram getransformeer word deur middel van 'n eenvoudige lineêre transformasie van die koördinate (Journel en Huijbregts; 1978). Laat (x_i, y_i) die kartesiese koördinate wees van 'n punt in die xOy -vlak. 'n Geometriese anisotropie sal bestaan indien daar 'n ellips gevind kan word waarvan die hoofas 'n hoek ψ met die Ox -as maak. Die verhouding λ ($\lambda =$ lengte van die hoofas/lengte van die newe-as > 1) is 'n goeie aanduiding van die mate van anisotropie en staan dan ook bekend as die anisotropieverhouding. Om so 'n ellips na 'n sirkel te transformeer en daardeur van die geometriese anisotropie ontslae te raak, is betreklik eenvoudig. Eerstens word die koördinaatasse xOy met 'n hoek ψ roteer sodat dit parallel aan die hoofas van die ellips is. Die nuwe koördinate (u_i, v_i) kan maklik bepaal word met behulp van die transformasie

$$\begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} \text{ waar } \begin{pmatrix} R_\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin\psi \\ -\sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix}$$

die bekende tweedimensionale rotasiematriks.

In die nuwe koördinate

$$\begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix} = \Lambda \begin{pmatrix} u_i \\ v_i \end{pmatrix} \text{ met } \Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

sal die ellips verander in 'n sirkel met radius gelyk aan die hoofas van die ellips waar (u_i', v_i') die nuwe koördinate is. Hierdie koördinate kan dan weer terug getransformeer word na die oorspronklike rigtings met behulp van die rotasie $-\psi$. So 'n rotasie kan wiskundig voorgestel word deur die transformasies

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{-\psi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i' \\ v_i' \end{pmatrix}$$

of in terme van die oorspronklike koördinate as

$$\begin{pmatrix} x_i' \\ y_i' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{-\psi} \\ \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{\psi} \\ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ x_j \end{pmatrix}$$

waar (A) = $\begin{vmatrix} a & c \\ c & b \end{vmatrix}$, 'n matriks is met elemente

$$a = \cos^2 \psi + \lambda \sin^2 \psi$$

$$b = \sin^2 \psi + \lambda \cos^2 \psi$$

$$c = (1 - \lambda) \sin \psi \cos \psi$$

Indien h enige vektor in die ruime xOy met komponente (h_i, h_j) is, sal sy komponente in die finale assestelsel van die vorm

$$\begin{pmatrix} h_i' \\ h_j' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_i \\ h_j \end{pmatrix}$$

wees. Deur hierdie waardes van (h_i', h_j') in die isotrope model $\gamma'(|h'|)$ te stel, kan die anisotrope semi-variogram maklik bereken word vanaf die vergelyking

$$\gamma(h_i, h_j) = \gamma' \left(\sqrt{h_i'^2 + h_j'^2} \right) \quad (2.6.1)$$

'n Ander metode is dié van Krige (1978). Monsters van die Witwatersrandse goudvelde bevredig oor die algemeen die de Wijs semi-variogram (kyk ook paragraaf 2.7.2)

$$(\gamma(h) = C_0 + 3 \alpha \log \frac{h}{0,446})$$

Vir 'n geometriese anisotrope medium stel Krige die semi-variogram

$$\gamma(h_i) = C_0 + 3 \alpha f h_i \quad (2.6.2)$$

waar α die absolute dispersie is, en

$$f = \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 \sin^2 \beta + b^2 \cos^2 \beta} \right)^{1/2}$$

'n anisotroopfaktor vir enige spesifieke waarde van

$$h_i = \log (h/0,446), \text{ voor,}$$

met β die hoek tussen die radius en die hoofas a . Die faktor so ingevoer kan dan beskou word as die 'radius' van 'n ellips met hoofas a en newe-as b (kyk figuur 2.6.4). Vir 'n isotrope geval met $a = b = 1$ is $f = 1$.

Beskou vervolgens die vergelyking

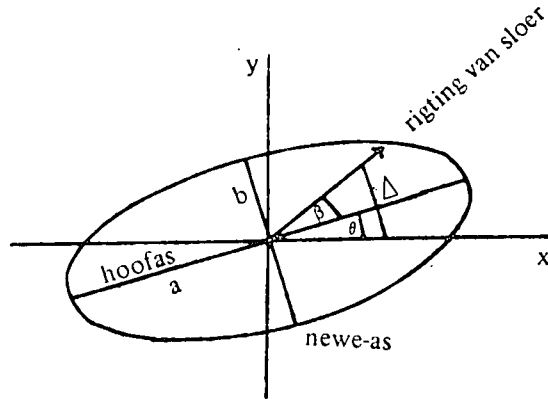
$$\gamma(h) = C_0 + 3\alpha \left(\frac{a^2 b^2}{b^2 \cos^2 (\Delta - \theta) + a^2 \sin^2 (\Delta - \theta)} \right)^{1/2} \log \frac{h}{0,446}$$

waar $\Delta = \tan^{-1} \left(\frac{y}{x} \right)$ die hoek is wat 'n sloer h met die x -as maak

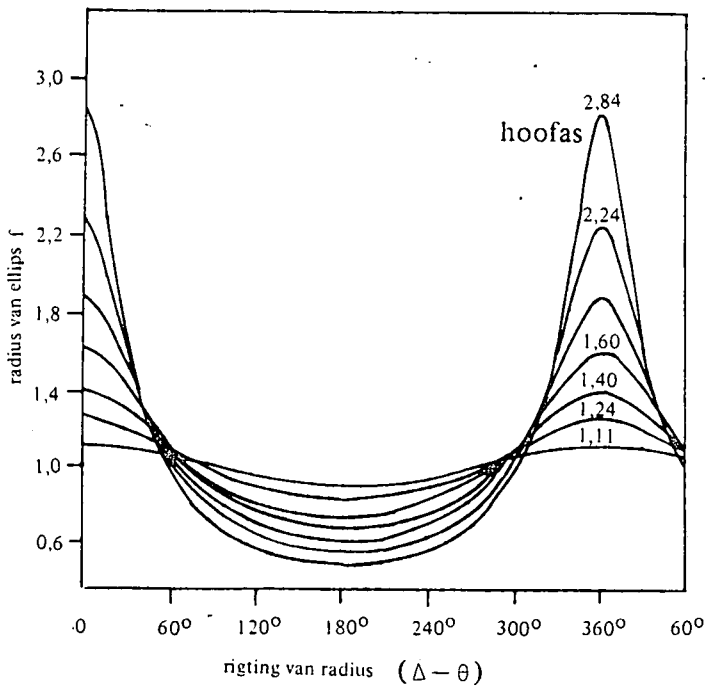
$\theta =$ hoek tussen die hoofas van die ellips en die gewone as (kyk figuur 2.6.4)

Vir sloere h in die rigting van die hoofas a is $\theta = \Delta$ en $f = a$, die maksimale verkreeë waarde, terwyl vir sloere langs die newe-as b , 'n minimumwaarde ($f = b$) verkry word.

Krige (1978) stel 'n grafiese manier voor vir die berekening van die parameters a , b en θ . 'n Gebied word opgedeel in sekere uitgesoekte rigtings met vasgestelde sloere. Vir elkeen van hierdie rigtings word die gemiddelde $\gamma(h)$ en $\log h/0,446$ waardes bereken vir die sloere en die vorige berekende waardes van C_0 en α word saam met (2.6.2) gebruik om 'n waarde vir f te kry. Hierdie f -waarde word dan vir elke rigting grafies aangestip teen die ooreenstemmende rigting Δ . Die vorm van die funksie f so verkry oor die interval $0 \leq \beta \leq 180$ sal dieselfde wees vir enige spesifieke waardes van a en b (kyk figuur 2.6.5). Die versameling krommes in figuur 2.6.5 word vervolgens gesuperimponer op die getekende waardes van f en die beste pas met die oog verkry. Hieruit kan die parameters a en b en die hoek θ dan bereken word. Volgens hierdie interpretasie is θ daardie hoek op die horisontale Δ -as wat ooreenstem met die piek van die gepaste f -kromme. Indien die anisotropie nie deur 'n eenvoudige transformasie verwyder kan word nie, is dit 'n sonale anisotropie (soos wat 'n mens sou verwag in die



Figuur 2.6.4. Voorstelling van ellips wat anisotropie voorstel.



Figuur 2.6.5. Verhouding tussen die radius van 'n ellips en die rigting daarvan vir 'n verspreiding van hoofasse.

geval van transmissiwiteite wat 'n tensoriële grootte is). In hierdie geval kan die anisotropie as individuele saamgevoegde strukture beskou word en elke gekose struktuur, met sy moontlike anisotropie, word apart beskou. Volgens Journel en Huijbregts (1978) is hierdie beskouing buigbaar genoeg om byna enige eksperimentele anisotropie te hanteer.

'n Ander benadering wat ook gebruik word vir die berekening van tweedimensionale semi-variogramme is die van David (1977). Hier word die gebied in hoekintervalle en afstandintervalle verdeel (kyk figuur 2.6.6). Die probleem is nou om uit te vind in watter gekose hoekinterval 'n gegewe paar waardes P en S lê. Dit kan soos volg bepaal word. Beskou die punte P, R en S in figuur 2.6.7. Laat

$$\underline{e} = \underline{i} \cos \theta + \underline{j} \sin \theta$$

die eenheidsvektor wees langs die lyn wat die punt P en R verbind en

$$\underline{r} = \underline{i} r \cos \omega + \underline{j} r \sin \omega$$

die vektor met grootte

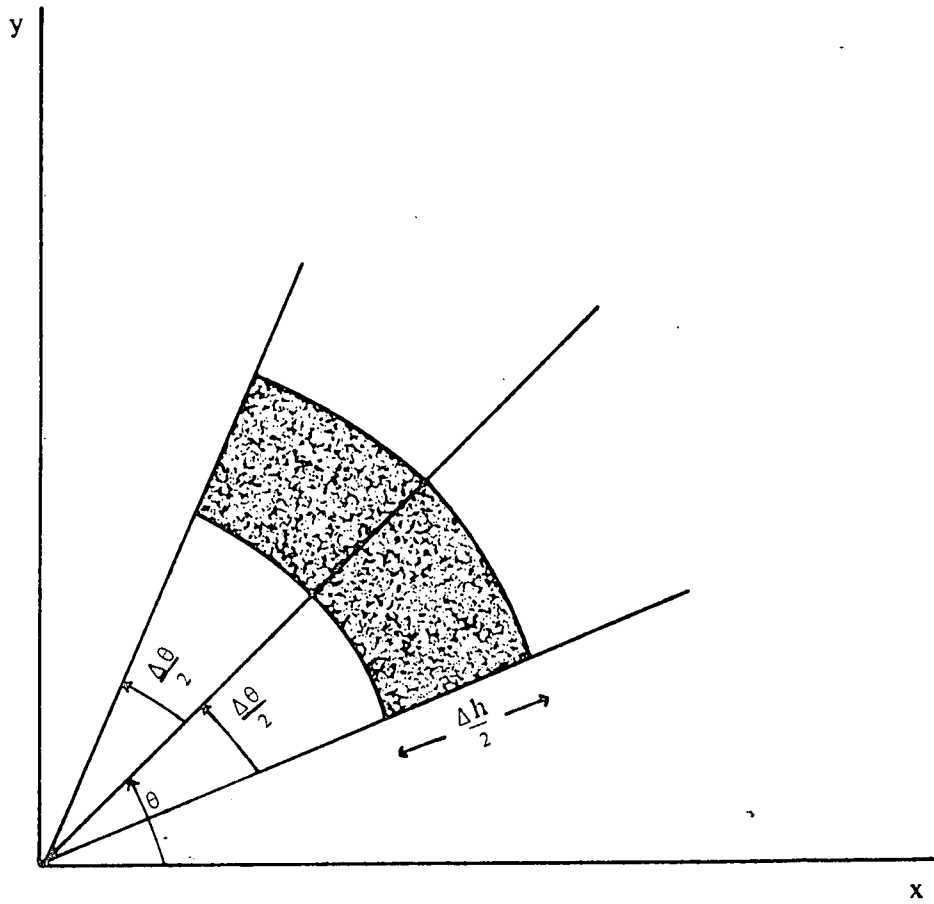
$$r = \sqrt{(x_s - x_p)^2 + (y_s - y_p)^2}$$

langs die lyn wat P met S verbind. Vanaf die bekende uitdrukking vir die skalare produk van twee vektore

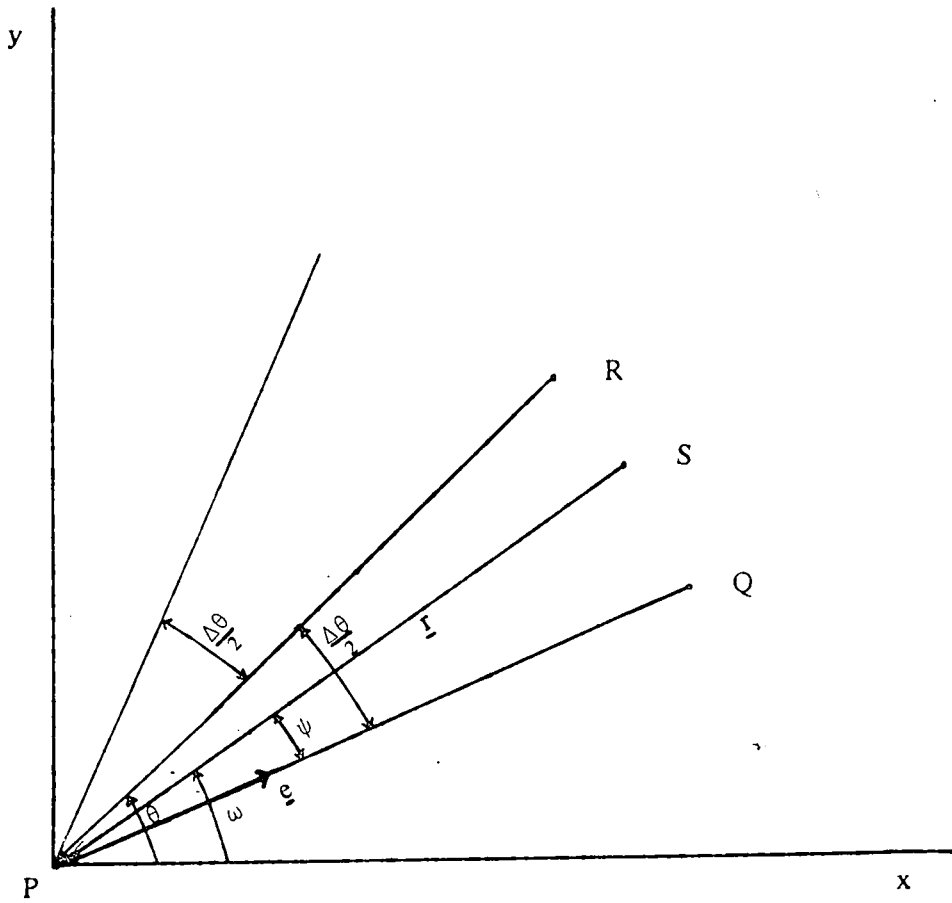
$$\underline{a} \cdot \underline{b} = ab \cos (a,b)$$

volg dat

$$\begin{aligned} \cos \psi &= \underline{e} \cdot \underline{r} / r = \cos \omega \cos \theta + \sin \omega \sin \theta \\ &= \cos(\theta - \omega) \end{aligned}$$



Figuur 2.6.6. Klassifikasiepatroon vir die berekening van 'n semi-variogram vir onreëlmatig verspreide data.



Figuur 2.6.7. Definisie van die hoek θ , ψ en ω , asook die vektore \underline{e} en \underline{r} gebruik in die

berekening van 'n semi-variogram volgens die metode van David (1977).

Indien $|\cos \psi| \geq \cos\left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ moet $\psi \leq \left(\frac{\Delta\theta}{2}\right)$ en val die paar wel binne die hoekinterval. Hierdie proses word voortgesit vir verskeie waardes van θ en die semi-variogram vir elke θ opgestel. Vir die doel kan die metode voorgestel vir die eendimensionale nie-gelykverspreide data uitgedruk in terme van die afstande $r, r + \Delta r, r + 2 \Delta r, \dots$, gebruik word. Hierdie semi-variogramme kan dan uiteindelik saamgevoeg word in 'n enkele semi-variogram $\gamma(h_j, \theta_j)$, wat in die verdere berekenings gebruik kan word. Dit dien daarop gelet te word dat hierdie metode ook gebruik kan word om 'n skatting van die rigting van die anisotropie-asse te maak (David; 1977). Die wesenlike verskil tussen die metodes van Krige en die ander twee metodes hier bespreek, is dat Krige se tegniek gebaseer is op 'n elliptiese patroon vir die semi-variogram wat ooreenstem met spesifieke sloere, terwyl die modelle van Journel en Huijbregts (1978) en David (1977) gebaseer is op 'n elliptiese patroon vir die sloere wat ooreenstem met spesifieke semi-variogramwaardes.

Die enigste tensoriële grootte van geohidrologiese belang is waarskynlik die transmissiwiteit van 'n akwifere. Hierdie waarde word in die veld bepaal deur een boorgat te pomp en dalings van die watervlakke in waarnemingsboorgate in die omgewing van die pompgat te meet. Vanuit hierdie gegewens is dit triviaal om die hoofrigtings van anisotropie te vind deur eenvoudig die metodes van Papadopoulos of Hantush te gebruik. In die geval van watervlakke en bergingskoeffisiënte kan slegs geometriese anisotropie verwag word, wat behandel kan word soos in die vorige bespreking uiteengesit.

2.7 MODELLE VIR DIE SEMI-VARIOGRAM

2.7.1 ALGEMEEN

Die eksperimentele semi-variogram is slegs puntsgewys bekend. Soos blyk uit die bespreking van die onderliggende teorie in paragraaf 2.5, kan daar verwag word dat in die praktiese toepassing van kriging dikwels waardes

van $\gamma(h)$ benodig sal word wat nie ooreenstem met die eksperimentele waardes nie. Hierdie probleem kan egter gereedelik oorkom word deur een of ander model aan die eksperimentele semi-variogram punte te pas. Verskeie van hierdie passingsmodelle sal vervolgens bespreek word.

2.7.2 MODELLE MET 'N DRUMPEL

2.7.2.1 MODEL MET 'N ALGEHELE KLONTEFFEK

Hierdie model is seker die eenvoudigste van alle modelle wat gebruik kan word. Wiskundig kan dit voorgestel word deur die vergelyking

$$\begin{aligned}\gamma(h) &= C && \text{(vir alle } h) \\ &= \text{varians}\end{aligned}$$

2.7.2.2 DIE SFERIESE MODEL

'n Model wat dikwels gebruik word en al die eienskappe besit wat, op grond van die intrinsieke hipotese (kyk paragraaf 2.4), van 'n semi-variogram verwag kan word, is die sferiese model. Hierdie model is basies van die vorm

$$\gamma(h) = \begin{cases} C[1,5 \frac{h}{a} - 0,5 \frac{h^3}{a^3}] + C_0 & , h \leq a \\ C + C_0 & , h > a \\ 0 & , h = 0 \end{cases}$$

waar $C + C_0 =$ drumpel

$C =$ varians

$C_0 =$ klonteffek

Die helling van hierdie kromme by die oorsprong is $3C/2a$. 'n Voorbeeld van hierdie model word in figuur 2.7.1 (a) getoon.

2.7.2.3 DIE EKSPONENSIALE MODEL

Hierdie model se helling by die oorsprong is C/a en word wiskundig beskryf deur die vergelyking

$$\gamma(h) = \begin{cases} C_0 + C[1 - \exp(-\frac{h}{a})] & , h > 0 \\ 0 & , h = 0 \end{cases}$$

Hierdie model vind selde praktiese toepassing omrede die drumpel baie stadig bereik word (figuur 2.7.1 (b)).

2.7.2.4 DIE GAUSS-MODEL

Hierdie model (sien figuur 2.7.1 (c)), gebaseer op die bekende Gauss-distribusie, vertoon 'n paraboliese vorm naby die oorsprong en word uitgedruk as

$$\gamma(h) = \begin{cases} C[1 - \exp(-\frac{h^2}{a^2})] + C_0 & , h > 0 \\ 0 & , h = 0 \end{cases}$$

sodat die helling nul is by die oorsprong.

2.7.3 MODELLE SONDER 'N DRUMPEL

2.7.3.1 LINEËRE MODEL

Die eenvoudigste model van hierdie groep van semi-variogramme is die lineêre model wat wiskundig uitgedruk kan word deur die vergelyking

$$\gamma(h) = Ah + B$$

2.7.3.2 DIE DE WIJS-MODEL

Hierdie logaritmiëse model is waarskynlik die belangrikste van die groep van modelle sonder 'n drumpel omrede die belangrike toepassing daarvan in die goudmynbedryf van Suid-Afrika (Krige; 1978)

$$\gamma(h) = a \ln(h) + C_0 \quad (\text{kyk figuur 2.7.1 (d)})$$

Soos wat verwag kan word, word 'n reguitlyn verkry indien $\gamma(h)$ teen $\ln(h)$ aangestip word.

In die Suid-Afrikaanse goudvelde word daar dikwels van die volgende de Wijs-model gebruik gemaak :

$$\gamma(h) = C_0 + 3 \alpha \log\left(\frac{h}{0,446}\right)$$

in die geval waar die eenheidsgebiede in 'n eenheidsvierkante lengte gemeet word en h in dieselfde eenhede gemeet word en α die absolute dispersie voorstel.

Daar bestaan nog verskeie ander modelle soos byvoorbeeld :

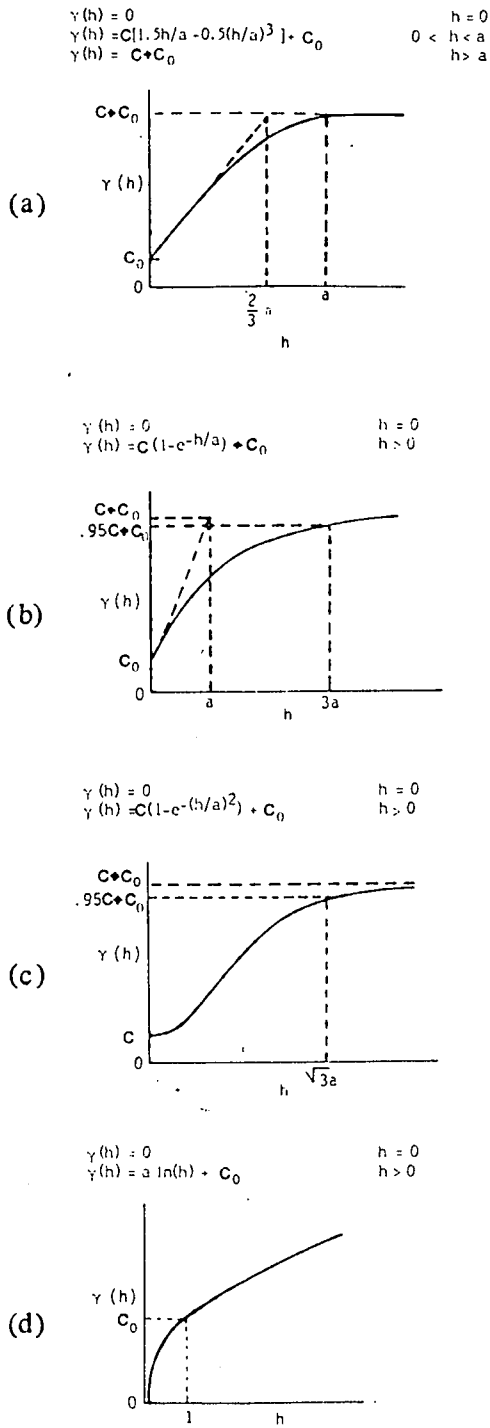
$$\gamma(h) = ah^\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2)$$

$$\gamma(h) = C \left(1 - \frac{\sin ah}{ah}\right) \quad (\text{die periodiese model})$$

en

$$\gamma(h) = 0,5 a^2 h^2 \quad (\text{die paraboliese model})$$

Hierdie modelle word meestal vir spesiale doeleindes gebruik sodat hulle nie verder hier bespreek sal word nie.

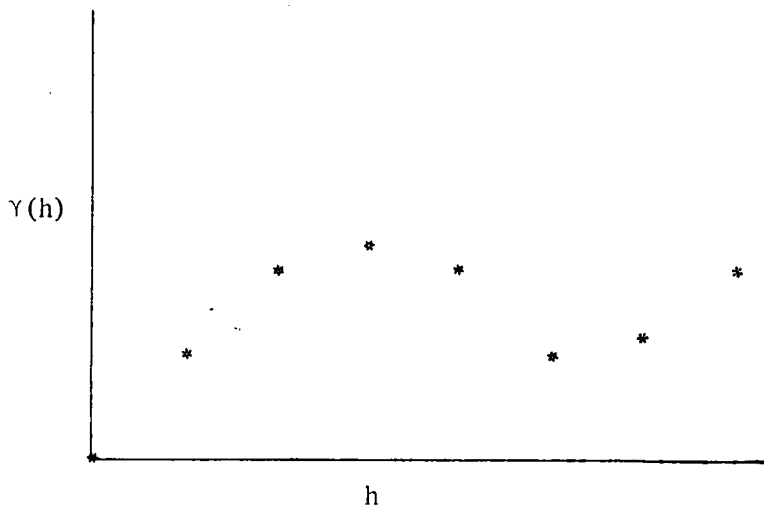


Figuur 2.7.1. Verskillende semi-variogram passingsmodelle (a) sferies,

(b) eksponensiaal, (c) Gauss en (d) de Wijs.

2.7.4 KUBIËSE LATFUNKSIES

Dit gebeur dikwels in die praktyk dat 'n mens te doen kry met 'n semi-variogram soos die in figuur 2.7.2 wat 'n sogenaamde 'holte-effek' (hole-effect) vertoon. Sulke semi-variogramme toon eintlik aan dat die waardes van die funksie $Z(x)$ nie meer beïnvloed word deur waardes $Z(x + h)$ op afstande $h \geq h^*$ vanaf die punt x nie. Wat 'n mens dus hier behoort te doen, is om die gebied in kleiner dele op te deel en 'n semi-variogram op elke gebied toe te pas. Dit is egter nie altyd so gerieflik nie en gevolglik word daar tog van hierdie semi-variogramme gebruik gemaak en een of ander model daardeur te pas.



Figuur 2.7.2. Voorbeeld van 'n holte-effek semi-variogram.

Alhoewel dit moontlik is om 'n globale funksie te vind wat so 'n semi-variogram sal pas, wil dit tog voorkom asof latfunksies die ideale basis vorm in hierdie tipe van semi-variogramme. Daar bestaan 'n verskeidenheid van latfunksies wat vir die doel gebruik kan word (de Boor; 1978). Hier sal daar egter net gekonsentreer word op die sogenaamde kubiese latfunksie.

So 'n kubiese latfunksie kan soos volg gedefinieer word (de Boor; 1978) :
 Gegee 'n funksie $f \in C^2[a,b]$, d.w.s. f is tweemaal differensieerbaar oor die interval $[a,b]$, en 'n rooster $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, dan is 'n kubiese latfunksie $S(x)$ daardie stuksgewyse kontinue polinoom van graad 3 wat so is dat vir alle intervale $[x_j, x_{j+1}]$

$$(a) \quad S(x_j) = f(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$(b) \quad DS^-(x_j) = DS^+(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$$

$$(c) \quad D^2S^-(x_j) = D^2S^+(x_j) \quad j = 0, 1, \dots, n$$

waar $D^q S(x)$ = die q -de afgeleide van S met betrekking tot x

$S^-(x)$ = die polinoom is gedefinieer oor $[x_{j-1}, x_j]$

$S^+(x)$ = die polinoom gedefinieer oor $[x_j, x_{j+1}]$

Om 'n kubiese latfunksie te konstrueer, kan soos volg te werk gegaan word. Aangesien $S(x)$ 'n kubiese polinoom is, is dit oor elke interval $[x_j, x_{j+1}]$ van die vorm

$$\begin{aligned} S_j(x) &= a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \\ &= a_j + b_j h_j + c_j h_j^2 + d_j h_j^3 \end{aligned}$$

waar h_j = afstand tussen knooppunte, en

a_j, b_j, c_j en d_j koëffisiënte is wat bepaal moet word.

Daar bestaan verskeie metodes waarmee hierdie koëffisiënte bepaal kan word. Basies gesien, kom dit egter op die volgende neer. Vir die n intervale $[x_j, x_{j+1}]$ bestaan daar $4n$ onbekendes wat bepaal moet word. Deur gebruik te maak van die voorwaarde (a) word gevind dat

$$S_j(x_j) = a_j = f(x_j)$$

waardeur $(n+1)$ van die koëffisiënte vasgelê is. Weens die kontinuïteitsvoorwaardes (b) en (c), moet

$$S_j^-(x_j) = S_j^+(x_j)$$

$$DS_j^-(x_j) = DS_j^+(x_j)$$

$$D^2S_j^-(x_j) = D^2S_j^+(x_j)$$

Dit lewer nog 'n verdere $3(n-1)$ voorwaardes sodat daar $4(n+1) - (n+1) - 3(n-1) = 2$ koëffisiënte oorbly wat nog bepaal moet word. Hierdie twee koëffisiënte kan bepaal word indien enige een van $Df(x_0)$, $D^2f(x_0)$ en enige een van $Df(x_n)$, $D^2f(x_n)$ bekend is, of geskat kan word (de Boor; 1978). 'n Baie algemene keuse is

$$D^2f(x_0) = D^2f(x_n) = 0$$

Dit gee aanleiding tot die sogenaamde natuurlike latfunksies wat nie altyd sulke goeie benaderings by die endpunte van die gebied gee nie. Gevolglik stel de Boor voor dat waar die waardes van die afgeleide nie by die endpunte van die gebied bekend is nie, hul geskat moet word uit die funksiewaardes self. Hierdie benadering lewer in die algemeen uitstekende resultate.

Die latfunksies hierbo gebruik, is streng gesproke net van toepassing in gevalle waar die $f(x_i)$ eksak bekend is. Vir eksperimentele data is dit meer gerieflik om gebruik te maak van kleinste kwadraat latfunksies. Die konstruksie van hierdie latfunksies word aansienlik vergemaklik deur gebruik te maak van die sogenaamde kardinale B-latfunksies met die eienskappe

$$B_j(x_k) = \delta_{jk} \quad \text{oor } [x_{j-1}, x_{j+1}]$$

(waar δ_{jk} die gewone Kronecker delta is, d.w.s. $\delta_{jk} = 1$ as $j = k$ anders is $\delta_{jk} = 0$) en B_j 'n kubiese polinoom oor $[x_{j-1}, x_j]$ en $[x_j, x_{j+1}]$ is. Met behulp van hierdie B-latfunksies kan enige funksie f geskryf word in die vorm

$$f = \sum_i a_i B_i$$

Die metode van kleinste kwadrate vereis nou dat

$$\int [\sum a_i B_i - f]^2 = S$$

Differensiasie van hierdie vergelyking met betrekking tot die a_i en die vereiste dat S 'n ekstreme waarde moet besit, lewer

$$2 \int [B_i] [\sum a_i B_i - f] = 0$$

dit is $\sum_i a_i \int B_i B_j = \int B_j f$

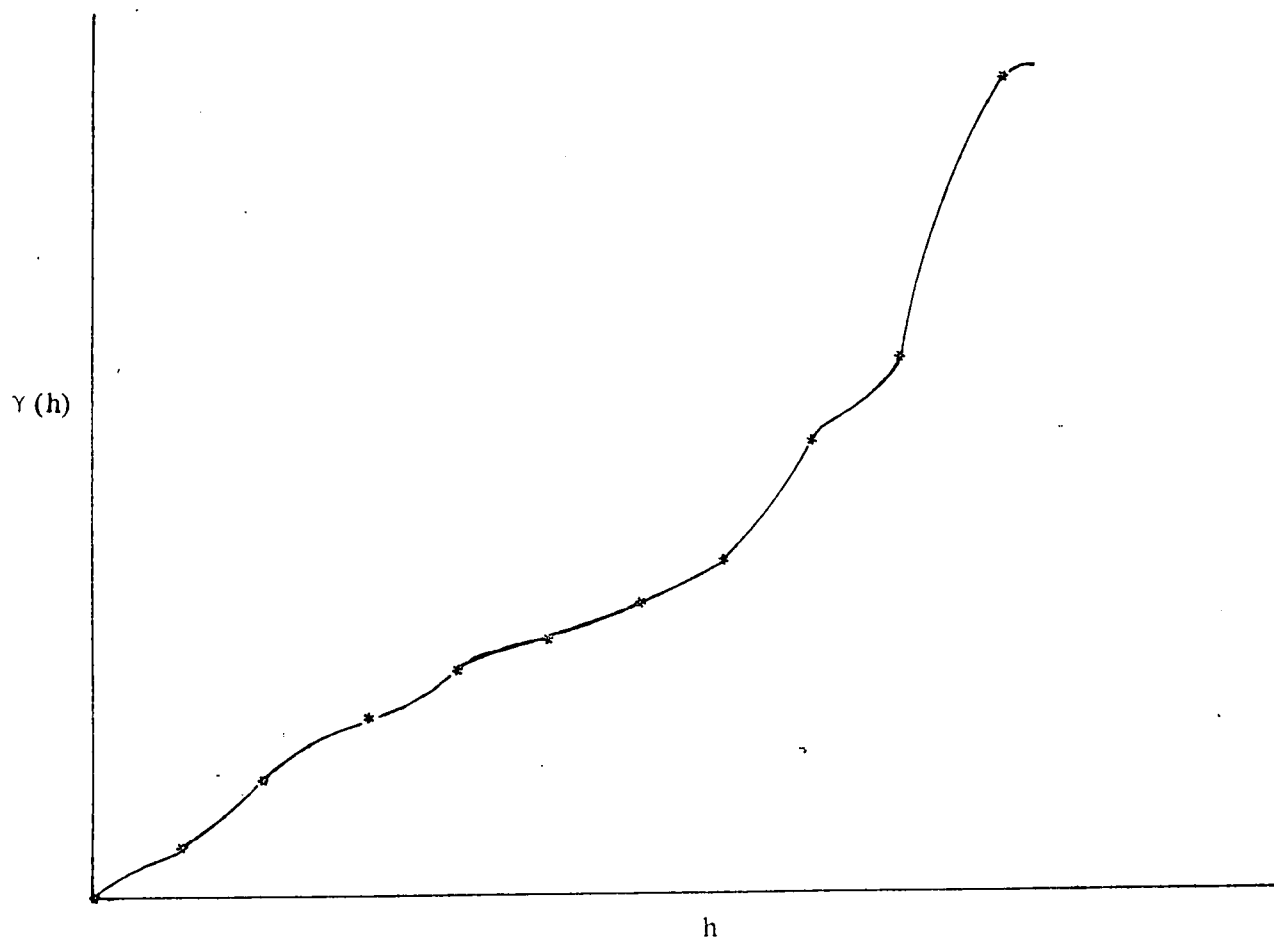
wat die stelsel normaalvergelykings is wat opgelos moet word.

In gevalle waar f slegs by diskrete punte bekend is, kan die integrasies uitgevoer word met behulp van een of ander numeriese tegniek soos die trapesium reël of Simpson se reël.

Figuur 2.7.3 toon 'n passing van 'n semi-variogram met kubiese latfunksies. Soos die figuur aantoon, vertoon die passing 'n kronkelende gedrag. Dit kan hoofsaaklik daaraan toegeskryf word dat die koëffisiënte van die latfunksie so bepaal is dat hul die latfunksie op die knooppunte vastrek. Daar bestaan egter ook tegnieke waardeur 'n mens slegs 'n paar optimale knooppunte kan kies wat dan 'n meer gladde passingskromme lewer, maar wat nie deur alle gegewe punte gaan nie (de Boor; 1978). Hierdie is eintlik die tegniek wat behoort gebruik te word in die geval van eksperimentele data.

2.8 KRIGING – 'N EENVOUDIGE VOORBEELD

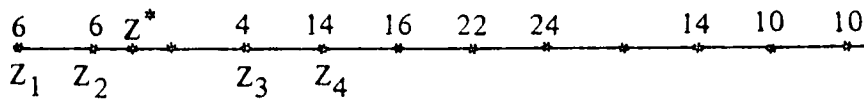
Ten einde die voorafgaande bespreking beter toe te lig, sal daar nou gekyk word na 'n baie eenvoudige probleem. Gestel daar bestaan 'n versameling data soos gegee in figuur 2.8.1. Soos vantevore aangedui, is die eerste stap in die toepassing van gewone kriging die berekening van die semi-variogram (sien tabel 2.8.1 en figuur 2.8.2). Ten einde die waarde Z^* te bereken met



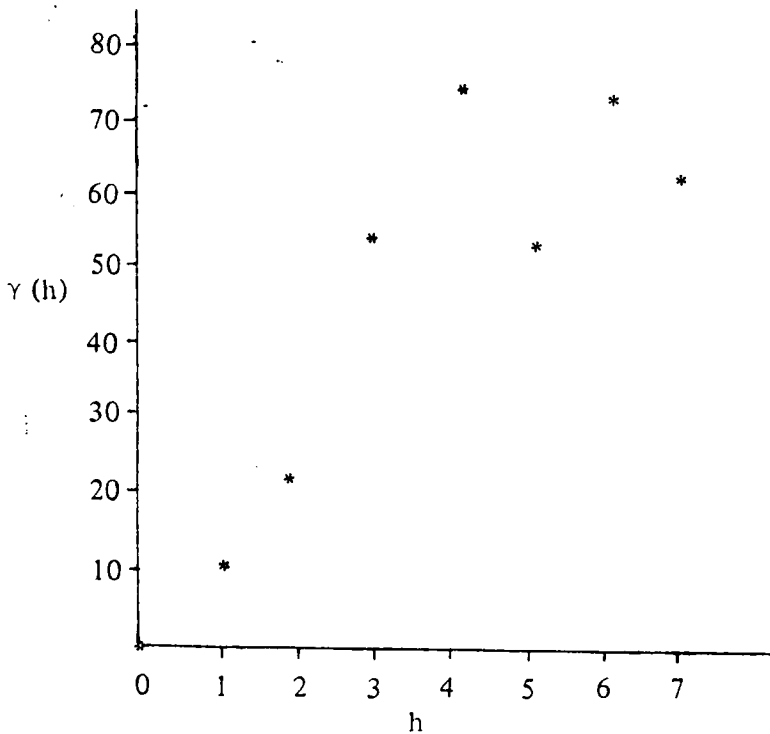
Figuur 2.7.3. 'n Passing van kubiese latfunksies (-) aan eksperimentele punte ().*

TABEL 2.8.1. BEREKENING VAN SEMI-VARIOGRAM VIR DIE DATA IN FIGUUR 2.8.1

h	0	1	2	3	4	5	6	7
n(h)	10	7	6	6	6	5	5	3
$\gamma(h)$	0	11,4	32,6	54,6	75,6	53,6	73,2	62,6



Figuur 2.8.1. Eksperimentele dataverspreiding vir krigingvoorbeeld.



Figuur 2.8.2. Grafiese voorstelling van die eksperimentele semi-variogram vir die data in figuur 2.8.1.

behulp van (2.5.11) is dit nodig om die waardes van c_{ij} en c_{i0} te bepaal. Aangesien x^* nie met een van die berekende punte saamval nie, moet daar eers 'n model deur die punte gepas word. Die grafiese voorstelling van die eksperimentele waardes van $\gamma(h)$ in figuur 2.8.2 dui aan dat die sferiese model

$$\gamma(h) = \begin{cases} 0 & , h = 0 \\ 65 \left[1,5 \frac{h}{5} - 0,5 \frac{h^3}{5^3} \right] & , h \leq 5 \\ 65 & , h > 5 \end{cases} \quad (2.8.1)$$

die gegewe data die beste pas. Deur gebruik te maak van (2.8.1) kan al die elemente van die koëffisiëntmatriks en die regterkantse vektor in (2.5.12) bereken word, om sodoende die stelsel van vergelykings

$$\begin{pmatrix} 65 & 45,76 & 13,52 & 3,64 & 1 \\ 45,76 & 65 & 28,08 & 13,52 & 1 \\ 13,52 & 28,08 & 65 & 45,76 & 1 \\ 3,64 & 13,52 & 45,76 & 65 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 36,62 \\ 55,28 \\ 36,62 \\ 20,31 \\ 1 \end{pmatrix}$$

te lewer. (Eenvoudigheidshalwe is besluit om slegs die 4 naaste punte aan Z^* in aanmerking te neem vir die berekening van Z^*). Die oplossing van hierdie vergelykings lewer

$$\begin{aligned} a_1 &= -0,0133 \\ a_2 &= 0,7660 \\ a_3 &= 0,2610 \\ a_4 &= -0,0139 \\ \mu &= -1,048 \end{aligned}$$

Dus is

$$\begin{aligned} Z^* &= -0,0133 (6) + 0,7660 (6) + 0,261 (4) - 0,0139 (14) \\ &= 5,36 \end{aligned}$$

Uit hierdie voorbeeld kan duidelik gesien word dat die naaste punte aan Z^* die meeste gewig dra. Dit is belangrik om daarop te let dat ons hier 'n sogenaamde filtereffek kry. Punte wat agter ander punte geleë is, dra byna geen gewig tot die berekening van Z^* by nie (sien die waardes a_1 en a_4). Hierdie filtereffek is teenwoordig omrede geen klonteffek in die semi-variogram teenwoordig is nie. Hoe groter hierdie klonteffek is, hoe kleiner is die filtereffek, en hoe groter is die bydrae van verskuilde punte (as die klonteffek byvoorbeeld gelyk aan 10 is, is die gewigte gelyk aan $a_1 = 0,118$; $a_2 = 0,5863$; $a_3 = 0,2542$ en $a_4 = 0,0413$).

Die krigingvarians word gegee deur

$$\begin{aligned} c_k^2 &= c(0) - \sum_{i=1}^4 a_i c_{i0} - \mu \\ &= 65 - 51,132 - (-1,048) \\ &= 14,9 \end{aligned}$$

Die 95% betroubaarheidsinterval word gegee deur

$$\begin{aligned} &Z^* \pm 2 c_k \\ &= 5,36 \pm 2(3,86) \\ &= 5,36 \pm 7,72 \end{aligned}$$

2.9 KRIGING VAN ONSEKERE DATA

In die voorafgaande bespreking is daar aanvaar dat die data $Z(x)$ eksak is. Kriging vind egter sy grootste toepassing by eksperimentele data wat altyd foute bevat as gevolg van die onvermoë om 'n punt eksak te meet. Om hiervoor voorsiening te maak, is dit gebruikelik om 'n eksperimentele datapunt \bar{Z}_i te skryf in die vorm

$$\bar{Z}_i = Z_i + \xi_i$$

waar Z_i die onbekende eksakte waarde is wat ooreenstem met \bar{Z}_i . As die

eksperimentele foute ξ_i wat in die data optree

- (a) nie sistematies is nie, d.w.s. $E[\xi_i] = 0$
- (b) $\text{Kov}[\xi_i \xi_j] = 0$
- (c) $\text{Kov}[\xi_i Z_i] = 0$

kan die metode van kriging nog steeds gebruik word (Delhomme; 1978). Om hierdie bewering te staaf, beskou Z^* en sy geassosieerde gemiddelde foutkwadraat

$$E[(\bar{Z} - \bar{Z}_0)^2]$$

Dieselfde prosedure gebruik by die daarstelling van (2.5.11) lewer nou, met inagneming van bogenoemde eienskappe, die krigingsstelsel

$$\sum_j a_j c_{ij} - a_i c_i + \mu = c_{i0}$$

$$\sum_i a_i = 1$$

waar $c_i = E[\xi_i^2]$

Die enigste verandering wat in die krigingsstelsel voorkom, is dus die vervanging van die hoofdiagonaalterm c_{ii} met $c_{ii} - c_i$. Hierdie metode sal dus slegs toegepas kan word in daardie gevalle waar die eksperimentele foute ξ_i bekend is en die genoemde voorwaardes bevredig.

2.10 GELDIGHEID VAN DIE KRIGINGMODEL

Tot dusver is daar in die bespreking stilswyend aanvaar dat die te krigende data 'n normale distribusie bevredig. As dit nie die geval is nie, kan daar probleme ondervind word met die toepassing van die model. 'n Baie eenvoudige voorbeeld is die rekenkundige gemiddelde van 'n veranderlike wat 'n lognormale distribusie volg. Alhoewel hierdie grootte nog steeds onsydig is, is dit besonder gevoelig vir waardes wat ver vanaf die gemiddelde lê. Daar word gesê dat sulke data is nie robuust nie.

Een metode wat gebruik kan word om nie-robuuste data te hanteer, is 'n transformasie. Die lognormale distribusie kan byvoorbeeld gereedelik hanteer word met behulp van die transformasie (Matheron; 1974)

$$Y_i = \log Z_i$$

Sodoende word 'n beramer

$$Y^* = \log Z^*$$

verkry wat maklik deur die antilogaritme na Z-waardes getransformeer kan word. Die betroubaarheidsinterval word in hierdie geval gegee deur

$$\sigma_{KZ} = 10^{Y^*} \cdot 10^{2\sigma_Y}$$

waar σ_Y die krigingsvarians is, bereken met behulp van die Y_i .

Ruimte-afhanklike veranderlikes wat fisiese verskynsels beskryf, vertoon in die algemeen net so 'n groot variasie in die distribusies wat hul volg, as die verskynsels self. Behalwe vir die geval van die lognormale distribusie is daar in die opset van kriging nog nie baie aandag aan die probleem geskenk nie. Een uitsondering wat hier vermelding verdien, is die werk van Cressie en Hawkins (1979). Hulle beskou die geval van data afkomstig van 'n gekontamineerde normaalverdeling (m.a.w. sekere uitskieters is in die data teenwoordig). Indien ϕ die kumulatiewe verspreidingsfunksie (KVF) van die standaard normaal $N(0,1)$ verspreiding voorstel, word die KVF van 'n gekontamineerde normaalverdeling gegee deur

$$F_\varepsilon(x) = (1 - \varepsilon) \phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right) + \varepsilon \phi\left(\frac{x - \mu}{g\sigma}\right) \quad (2.10.1)$$

Vir $\varepsilon = 0$ of $\varepsilon = 1$ reduceer (2.10.1) na die normaalverdeling, maar as $g > 1$ en $\varepsilon > 0$ definieer dit 'n verspreiding $N(\mu, \sigma^2)$ in die middel, maar met skuins sye. Vir sulke gevalle stel Cressie en Hawkins 'n transformasie van die vorm

$$Y_t = [(Z_t + h) - Z_t]^{2\lambda},$$

met λ 'n konstante voor. By verdere ondersoek het dit geblyk dat $\lambda = 0,25$ 'n geskikte keuse behoort te wees. Die grootte

$$Y_t = \sqrt{(Z_t + h) - Z_t} \quad (2.10.2)$$

kan dus beskou word as 'n goeie beramer van die middelpunt van simmetrie.

Cressie en Hawkins toon ook aan dat indien \bar{Y} die gemiddelde van n waardes van Y_t in (2.10.2) is, geld

$$E(\bar{Y}^4/2 \gamma(h)) = 0,457 + 0,494/n + 0,045/n^2$$

'n Onsydige beramer van 'n semi-variogram $\gamma(h)$ vir sulke data is dus

$$\gamma(h) = \frac{1}{2} \bar{Y}^4 / (0,457 + 0,494/n + 0,045/n^2)$$

Hierdie vergelyking kan ook gebruik word as 'n gegewe verdeling byna normaal in die middel is, maar met 'n ander tipe verdeling in die sye.

Soos blyk uit die voorafgaande bespreking, sal dit voordelig wees indien daar 'n metode gevind kan word wat aandui hoe goed 'n bepaalde model aan 'n gegewe stel data pas. In die geval van data wat direk of na 'n transformasie die intrinsieke hipotese bevredig, kan 'n mens verwag dat (Journal en Huijbregts; 1978)

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_i^*) \approx 0$$

en
$$\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i - Z_i^*}{\sigma_k} \right)^2} \approx 1$$

Deur dus hierdie groottes te bereken, kan daar bepaal word hoe goed die data die gebruikte model bevredig.

2.11 UNIVERSELE KRIGING

Fisiese verskynsels is selde, indien ooit, van so 'n aard dat dit gereedlik beskryf kan word deur 'n lineêre of konstante ruimte-veranderlike. Die gevolg is dat die eenvoudige krigingmetode nie op hul van toepassing is nie. Vandaar die huidige belangstelling in universele kriging wat vervolgens bespreek sal word.

Die basiese eienskap van 'n ruimte-afhanklike veranderlike wat nie die stasionêre voorwaarde bevredig nie is dat die verwagte waarde van Z nie meer 'n konstante is nie (Huijbregts en Matheron; 1971), maar 'n funksie van x is, d.w.s.

$$E[Z(x)] = m(x), \quad (2.11.1)$$

waar $m(x)$ bekend staan as die drywing of tendens.

Die nie-stasionêre funksie $Z(x)$ kan nou uitgedruk word as die som van 'n drywingsterm en 'n residu

$$Y(x) = Z(x) - m(x) \text{ met } E[Y(x)] = 0 \quad (2.11.2)$$

Aangesien $m(x)$ onbekend is, kan die semi-variogram nie meer bepaal word nie. Een manier om hierdie probleem te oorkom, is om te aanvaar dat die drywing beskryf kan word deur 'n lineêre som van bekende basis-funksies, $f^k(x)$,

$$m(x) = \sum_{k=1}^K b_k f^k(x) \quad (2.11.3)$$

As aanvaar word dat die krigingberamer weer eens verkry kan word deur die lineêre kombinasie

$$Z^* = \sum_{i=1}^n a_i Z_i$$

dan vereis die onsydige beramer dat

$$\sum_i a_i \left(\sum_k b_k f^k(x_i) \right) = \sum_k b_k f^k(x_0) \quad (2.11.4)$$

Aangesien die b_k en a_i onafhanklik van mekaar is, kan (2.11.4) ook geskryf word as

$$\sum_k b_k \left\{ \sum_i a_i f^k(x_i) - f^k(x_0) \right\} = 0$$

Die b_k is per definisie die ontwikkelingskoeffisiënte van $m(x)$ en kan dus nie almal nul wees nie (tensy $m(x) = 0$). Gevolglik moet

$$\sum_k a_i f^k(x_k) = f^k(x_0) \quad (2.11.5)$$

Hierdie voorwaarde kan as die ekwivalente van die onsydige voorwaarde $\sum_i a_i = 1$ beskou word.

Die krigingstelsel kan weer eens uit die gemiddelde foutkwadraat (2.5.3) bereken word, naamlik

$$\begin{aligned} E[(Z^* - Z_0)^2] &= E[(\sum_i a_i Z_i - Z_0)^2] \\ &= \sum_{ij} a_i a_j E[Z_i Z_j] - 2 \sum_i a_i E[Z_0 Z_i] + E[Z_0^2], \end{aligned} \quad (2.11.6)$$

Indien (2.11.5) regdeur met die Lagrange vermenigvuldigers μ_k vermenigvuldig word en dan gesommeer word, volg

$$\sum_i a_i \sum_k \mu_k f^k(x_i) - \sum_k \mu_k f^k(x_0) = 0$$

In plaas van (2.11.6) te minimeer, kan 'n mens net so goed die uitdrukking

$$\sum_i a_i a_j c_{ij} - 2 \sum_i a_i c_{i0} + c(0) + \sum_i \mu_k f^k(x_i) - \sum_k \mu_k f^k(x_0)$$

minimeer. Dit lewer die krigingstelsel

$$\begin{aligned} \sum_j a_j c_{ij} + \sum_k \mu_k f^k(x_i) &= c_{i0} \\ \sum_i a_i f^k(x_i) &= f^k(x_0) \end{aligned} \quad (2.11.7)$$

Vir 'n ruimte-afhanklike veranderlike wat 'n kwadratiese drywing toon, kan $f^k(x)$ in (2.11.3) gekies word as die polinome $1, x, x^2$. Die krigingstelsel van vergelykings is in hierdie geval van die vorm $C \underline{a} = \underline{b}$

waar

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} & 1 & x_1 & y_1 & x_1^2 & y_1^2 & x_1 y_1 \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} & 1 & x_2 & y_2 & x_2^2 & y_2^2 & x_2 y_2 \\ - & - & \dots & - & - & - & - & - & - & - \\ - & - & \dots & - & - & - & - & - & - & - \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} & 1 & x_n & y_n & x_n^2 & y_n^2 & x_n y_n \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ y_1^2 & y_2^2 & \dots & y_n^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_1 y_1 & x_2 y_2 & \dots & x_n y_n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2.11.8)

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \\ \mu_0 \\ \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \\ \mu_4 \\ \mu_5 \end{pmatrix} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} c_{10} \\ c_{20} \\ \dots \\ c_{n0} \\ 1 \\ x_0 \\ y_0 \\ x_0^2 \\ y_0^2 \\ x_0 y_0 \end{pmatrix}$$

Weens die struktuur van (2.11.8) kan dit geskryf word as

$$\begin{pmatrix} C & X \\ X^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ x_0 \end{pmatrix} \quad (2.11.9)$$

waar C en X matrikse voorstel. Die oplossing van (2.11.9) is

$$\underline{a} = \underline{X}^T \cdot \underline{x}_0 = (\underline{X}^T)^{-1} \cdot \underline{x}_0$$

wat impliseer dat die koëffisiënte a_i bepaal kan word sonder om die semi-variogram te ken. Indien die koëffisiënte a_i op hierdie manier bereken wil word, moet onthou word dat geen foutvarians verkry kan word nie. Die akkuraatheid van die geskatte waarde hang dus hier geheel en al daarvan af van hoe goed die gebruikte funksies $m(x)$ benader. Indien hierdie metode toegepas wil word, mag dit voordelig wees om te eksperimenteer met verskeie basisfunksies, soos Fourier-reekse vir die benadering van $m(x)$. Vir hierdie geval behoort die basisfunksies $1, \sin(\pi x/L_1), \sin(\pi y/L_2), \sin(2\pi x/L_1), \sin(2\pi y/L_2), \sin(\pi x/L_1) \sin(\pi y/L_2)$ moontlik 'n bevredigende oplossing te verskaf (L_1 is die lengte van die gebied in die x-rigting en L_2 die lengte van die gebied in die y-rigting). Let ook op dat hierdie keuse van basisfunksies in die benadering van $m(x)$, bepaal hoeveel datapunte gebruik moet word vir 'n skatting van Z^* . Vir 'n kwadratiese drywing moet daar byvoorbeeld 6 datapunte gebruik word om 'n onbekende Z^* te skat, terwyl vir 'n lineêre drywing 3 datapunte benodig word.

'n Ander benadering wat gebruik kan word, is om die elemente van die koëffisiëntematriks en regterkantse vektor in (2.11.9) iteratief te probeer bepaal. Sover bekend, bestaan daar egter geen doeltreffende iterasieproses wat vir die doel gebruik kan word nie. Gevolglik is die metode op sy beste 'n langdradige probeer-en-tref-metode. Die kringvarians van die metode bestaan in beginsel en word gegee deur

$$\text{Var}(Z^* - Z_0) = c(0) - \sum_i a_i c_{i0} - \sum_k \mu_k f^k(x_0)$$

Ten einde die probleem van universele kriging te oorkom, het Matheron (1973) voorgestel dat daar gebruik gemaak moet word van intrinsieke funksies van orde k . Hierdie metode kom daarop neer dat 'n mens eerder die veralgemeende kovarians ($K(h)$) bereken in plaas van die semi-variogram.

Waar by die semi-variogram inkremente van die funksie in plaas van die funksie self beskou is, word hier inkremente van inkremente beskou. 'n Geskikte inkrementfunksie wat vir die doel gebruik kan word, is die bekende eindige verskille. In die literatuur van kriging word daar dan ook na die eerste eindige verskil

$$\Delta Z_n = Z_{n+1} - Z_n$$

verwys as 'n inkrement van orde nul. Die tweede eindige verskil

$$\Delta^2 Z_n = Z_{n+2} - 2Z_{n+1} + Z_n$$

staan weer bekend as 'n eerste orde inkrement. So kan daar voortgegaan word en hoër ordes inkremente daargestel word.

'n Belangrike eienskap van die inkrementfunksie is dat vir 'n polinoom van graad n

$$\Delta^n p(x) = \text{konstante}$$

en $\Delta^{n+1} p(x) = 0$

Indien 'n gegewe veranderlike dus 'n polinomiese tendens besit, kan hierdie beginsel met sukses gebruik word om drywings uit te filtreer.

Hierdie beginsel kan nou gebruik word om die begrip veralgemeende inkrement in te voer. Beskou weer eens die geval van die veranderlike $Z(x)$ in (2.11.2). 'n Veralgemeende inkrement van $Z(x)$ is, per definisie, 'n lineêre som

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i)$$

sodanig dat

$$\sum_i \lambda_i f^k(x_i) = 0 \quad (2.11.10)$$

Vir so 'n veralgemeende inkrement geld

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) \equiv \sum_{i=1}^n \lambda_i Y(x_i)$$

omrede die term $\sum_i \sum_k b_k \lambda_i f^k(x_i)$ uitgefiltreer is.

'n Besonder handige grootte wat nou saamhang met 'n veralgemeende inkrement, is die grootte

$$\begin{aligned} G(x_0) &= \sum_{i=0}^n \lambda_i Z(x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i Z(x_i) + \lambda_0 Z(x_0) \end{aligned} \quad (2.11.11)$$

In navolging van Matheron (1973) kan hierdie grootte gebruik word om 'n veralgemeende kovarians

$$K(h) = \sum_i \sum_j \lambda_i \lambda_j K(x_i - x_j) \quad (2.11.12)$$

te definieer deur die vergelyking

$$\text{Var} [G(x_0)]^2 = K(h) \quad (2.11.13)$$

Ten einde hierdie grootte te bereken, kan soos volg te werk gegaan word. Aangesien die λ_i 's volgens (2.11.11) nie lineêr onafhanklik is nie, kan een van hulle willekeurig gekies word, sê $\lambda_0 = -1$. Die res van die λ 's kan dan op verskillende maniere bereken word. Een metode sou wees om 'n bekende datapunt $Z_0 = Z(x_0)$ met n datapunte in sy onmiddellike omgewing te kies. Die metode van kleinste kwadrate kan dan op $[G(x_0)]^2$ toegepas word,

om sodoende die n λ_i 's te bepaal. 'n Tweede een sou wees om te aanvaar dat $m(x)$ 'n inkrement van orde k is en dus weergegee kan word deur 'n polinoom van graad k , sodat

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = -1, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = -x_0, \quad \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i = -y_0 \quad (2.11.14)$$

By die praktiese gebruik van die metode mag dit dalk voordelig wees om eers die waardes van die λ_i met behulp van die MKK op $[G(x_0)]^2$ te bereken en dan hierdie waardes in (2.11.14) te stel, ten einde vas te stel hoe goed die aanname van 'n inkrement van orde k werklik is.

Sodra die λ_i bekend is, kan daar nou gepoog word om die veralgemeende kovarians te bepaal. Dit kan alleen gedoen word indien die $K(x_i - x_j) = K(r)$ (sê) in (2.11.12) bekend is. 'n Prosedure wat vir die doel gebruik word, is om $K(r)$ te benader met een of ander versameling van basisfunksies. 'n Besonder gewilde keuse is die versameling van onewe polinome van graad $2k + 1$ (Matheron; 1973) waarby 'n term bestaande uit die Dirac delta-funksie $\delta(0)$ gevoeg word om voorsiening vir 'n moontlike klonteffek te maak. Voorbeelde van sulke benaderings is

$$K(r) = A_0 \delta(0^+) + A_1 |r| + A_3 |r|^3 + A_5 |r|^5$$

$$K(r) = A_0 \delta(0^+) + A_1 |r|$$

Niks verhoed 'n mens egter om ook ander basisfunksies te gebruik nie.

Nadat die keuse van basisfunksies vir $K(r)$ afgehandel is, bly daar nog die probleem om die ontwikkelingskoeffisiënte A_i te bepaal. Daar bestaan natuurlik verskeie metodes waarop dit gedoen kan word. Die eenvoudigste skyn egter te wees om weer eens 'n kleinste kwadraat-tegniek toe te pas op (2.11.13), d.w.s. op die kwadratiese grootte

$$\left[G(x_0) - \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n \lambda_i \lambda_j K(x_i - x_j) \right]^2$$

onderhewig aan die voorwaarde

$$K(x_i - x_j) = A_0 \delta(0) + \sum_{k=1}^K A_{2k+1} |x_i - x_j|^{2k+1} \geq 0$$

te minimeer.

Daar bestaan verskeie tegnieke waarmee die probleem opgelos kan word. 'n Aantal numeriese eksperimente het getoon dat die boetefunksie-metode van Fletcher (1973) besonder geskik vir die doel is. Kortliks kom hierdie metode op die volgende neer. Gestel daar word belanggestel in die minimum van 'n funksie $F(x)$ in n veranderlikes (x_1, x_2, \dots, x_n) , onderhewig aan die voorwaardes

$$c_\ell(x) \geq 0 \quad \ell = K + 1, \dots, m$$

($K = 0$ en $K = m$ is toegelaat, maar $m \leq n$)

Daar word dan gepoog om die boetefunksie

$$\phi(x, \theta, \sigma) = F(x) + \frac{1}{2} \sum_{\ell} \sigma_{\ell} [c_{\ell}(x) - \theta_{\ell}]^2$$

iteratief te minimeer vir vaste waardes van die σ_{ℓ} en θ_{ℓ} . Na elke iterasie word die parameters, σ_{ℓ} en θ_{ℓ} , so gevarieer dat die reeks van minima $x_{\sigma, \theta}$ strewe na die oplossing van die beperkte probleem.

Die enigste nadeel verbonde aan die metode is dat daar 'n geskatte oplossing, d.w.s. waardes van die A_k , aan die rekenaar verskaf moet word. 'n Eenvoudige manier om dit te doen, is om bloot $G(x_0)$ by K verskillende waardes van x_0 te gaan bereken en waardes van die A_k te bepaal met behulp van (2.11.13).

Sodra $K(h)$ bekend is, kan die krigingprosedure soos voorheen toegepas word.

2.12 MOONTLIKE TOEPASSINGS VAN KRIGING IN DIE GEOHIDROLOGIE

Kriging is in wese 'n interpolasie-metode wat gebruik kan word vir die skatting van waardes van 'n ruimte-afhanklike veranderlike by gegewe posisies in sy gebied van definisie. Probleme van hierdie aard kom algemeen voor in die modellering van geofisiese verskynsels. Die vraag ontstaan dus tot watter mate van kriging gebruik gemaak kan word in geofisiese modellering. In die bespreking wat hierop volg, sal daar gepoog word om 'n antwoord op hierdie vraag te verstrek.

Dit is natuurlik onmoontlik om alle geofisiese verskynsels in 'n ondersoek soos hierdie te dek. Gevolglik sal die bespreking wat hierop volg, beperk word tot slegs enkele moontlike toepassingsvelde. Meer spesifiek, sal aandag geskenk word aan :

- (i) die probleem van parameteridentifikasie in die modellering van grondwater (hoofstuk 3),
- (ii) interpolasie van waargenome watervlakke (hoofstuk 4),
- (iii) interpolasie van hidrochemiese elemente (hoofstuk 5), en
- (iv) die skatting van die volumes van oplossingsholtes en verweringsones in dolomiete (hoofstuk 6).

HOOFSTUK 3

PARAMETERIDENTIFIKASIE IN DIE GEOHIDROLOGIE

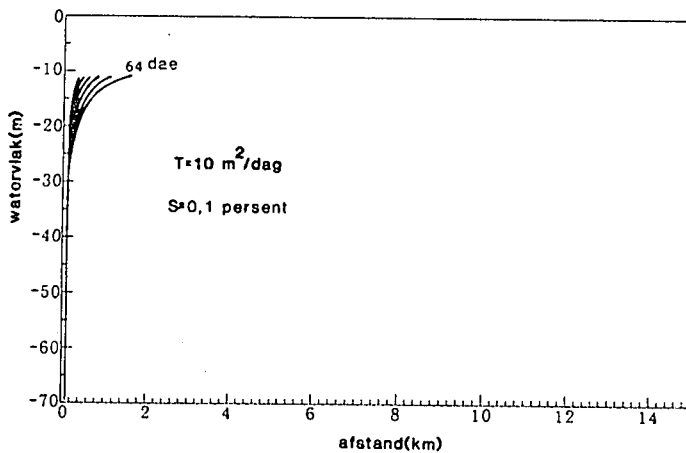
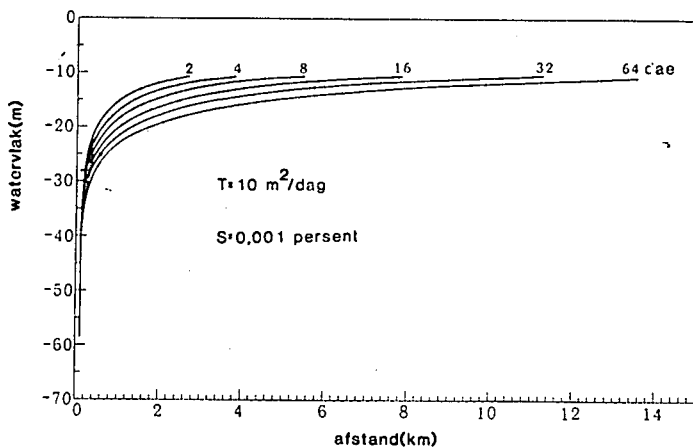
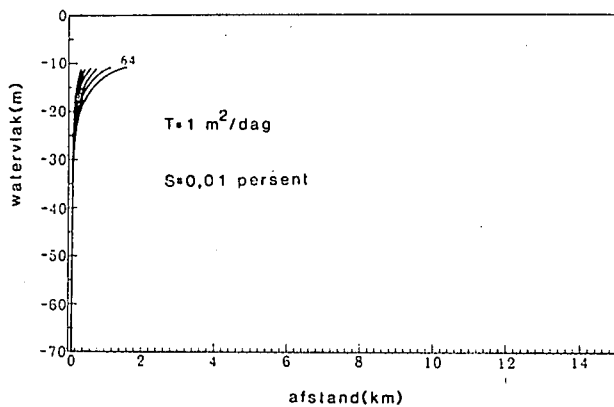
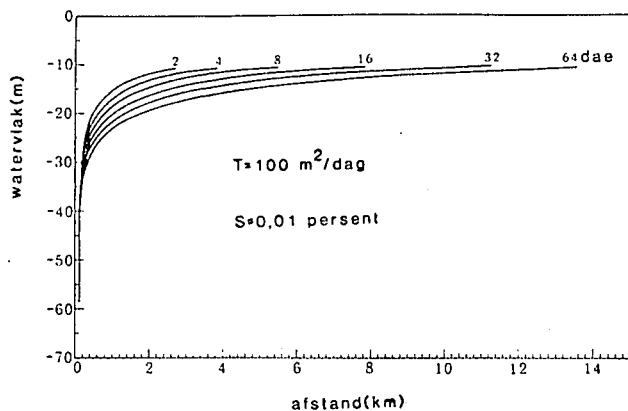
3.1 ALGEMEEN

'n Afdeling van die geohidrologie waar interpolasie van groot waarde kan wees, is by die daarstelling van 'n numeriese model vir die voorspelling van watervlakke as 'n funksie van tyd. So 'n numeriese model vereis naamlik verteenwoordigende waardes van die transmissiwiteite (T) en bergingskoëffisiënte (S) by 'n groot aantal punte oor die gebied wat die sisteem beslaan. Aangesien hierdie parameters die voorspelde watervlakke tot 'n baie groot mate beïnvloed (kyk figuur 3.1.1), moet daar altyd gepoog word om hierdie parameters so akkuraat as moontlik te ken. Pomptoetse wat uitgevoer moet word vir die bepaling van hierdie parameters is baie duur en kan derhalwe slegs by 'n klein klompie boorgate uitgevoer word. Soos uit die volgende bespreking gesien sal word, speel die interpolasie van hierdie data 'n belangrike rol by die ontwikkeling van so 'n model.

Die vloeï van grondwater deur 'n homogene anisotrope akwifere kan in die algemeen deur die tweede orde partiële differensiaalvergelyking beskryf word :

$$\nabla [T \cdot \nabla h] = S D_t h \quad (3.1.1)$$

- waar ∇ = die gewone gradiëntoperator
 T = transmissiwiteitstensor van die akwifere
 S = bergingskoëffisiënt van die akwifere
 h = drukhoof van die watervlak



Figuur 3.1.1. Ontwateringskurwes vir verskillende transmissiwiteite (T) en bergingskoeffisiënte (S).

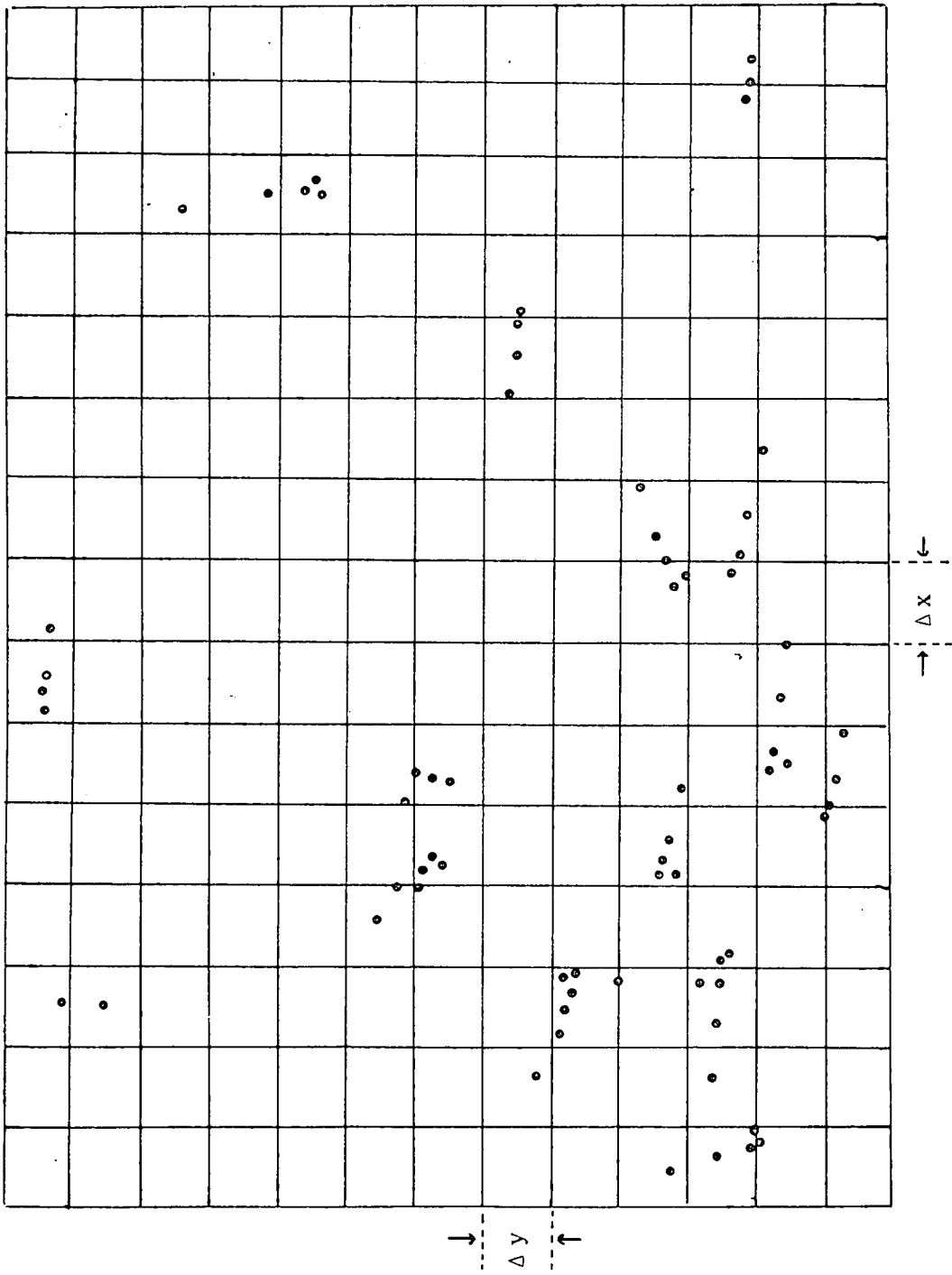
Om (3.1.1) numeries op te los, vereis 'n kennis van die aanvangswaarde van die drukhoof h op 'n sekere tydstip (t_0 sê), die randvoorwaardes van h op die grense van die akwifereer en die koëffisiënte T en S .

Aangesien 'n akwifereer selde 'n reëlmatige vorm besit en homogeen van aard is, kan (3.1.1), in die meeste gevalle van praktiese belang, slegs numeries opgelos word. Twee metodes wat dikwels in die geohidrologie vir dié doel gebruik word, is die eindige verskil en die eindige element-metodes. Beide die metodes vereis dat die gebied wat die akwifereer beslaan in kleiner gebiede, ook bekend as eindige verskil of eindige element netwerke, opgebreek word. So 'n netwerk vir die Kaapse Vlakte-akwifereer word in figuur 3.1.2 getoon.

Die toepassing van enigee van die twee genoemde metodes vereis dat die waardes van T en S bekend moet wees by elkeen van die knooppunte wat in die netwerk voorkom. Dit beteken dat 'n mens by die toepassing van hierdie metodes altyd waardes van die parameters by die knooppunte moet skat. Vir dié doel sal 'n interpolasie-metode natuurlike uiters geskik wees. Dieselfde beginsel geld ook vir die waardes van die watervlakke by $t = t_0$.

Die doel van enige model is, soos goed bekend, die voorspelling van sekere te mete groottes wat, binne sekere foutgrense, met werklike gemete waardes moet ooreenstem. In die geval van akwifereermodellering beteken dit dat die watervlakke wat met behulp van (3.1.1) voorspel word, moet ooreenstem met watervlakke werklik in die akwifereer gemeet. Indien geen voldoende ooreenstemming verkry word nie, moet die model weer deurgevoer word, meestal met T en S -waardes wat afwyk van dié vantevore gebruik.

Bogenoemde tegniek is natuurlik niks anders as 'n probeer-en-tref-metode vir die oplossing van die inverse probleem of ook bekend as die probleem van parameteridentifikasie nie (Sabatier; 1978). Soos bekend, besit hierdie probleem nie 'n eenduidige oplossing nie (Sabatier; 1978). Die gevolg is



Figuur 3.1.2. Voorbeeld van 'n eindige verskil netwerk vir die Kaapse Vlakte-akwifereer.

dat as 'n mens die waardes van \underline{T} en S willekeurig gaan verander, kan jy (3.1.1) forseer om 'n stel watervlakke te voorspel wat ooreenstem met die waargenome waardes. Die \underline{T} en S -waardes hiervoor gebruik hoef egter geensins ooreen te stem met dié wat werklik in die akwifere gemeet is nie. Waardes van die parameters \underline{T} en S kan dus nie sommer willekeurig gekies word nie. Dit sal dus besonder gerieflik wees, indien die metode wat gebruik word in die interpolasie van die data, terselfdertyd 'n skatting van die foutgrense van die geskatte waardes kan maak.

Indien die model nie met \underline{T} en S -waardes binne hierdie grense pas nie, moet na ander redes, soos foutiewe beginwaardes of randvoorwaardes, gekyk word om te sien of hier nie 'n fout begaan is nie. Veral randvoorwaardes is dikwels 'n wesenlike probleem. Die oplossing van (3.1.1) word naamlik tot 'n groot mate bepaal deur die randvoorwaardes (Courant en Hilbert; 1966). In die praktyk word hul meestal met behulp van geofisiese metodes of uit die geologie van die gebied self bepaal. Dikwels is dit egter nie moontlik om groot somme geld net vir die opsporing van die rande te spandeer nie, en is die modelleerder genoodsaak om sy eie skatting daarvan te maak. Inligting omtrent die variasie van \underline{T} en S kan dus ook belangrik wees by die vaslegging van hierdie grense. Dit is nie die doel van hierdie ondersoek om in detail op modelleringsprobleme in te gaan nie, derhalwe sal daar in die res van hierdie bespreking slegs aandag aan die skatting van \underline{T} en S -waardes gegee word.

Volgens die beskikbare literatuur is kriging as interpolasie-metode vir die voorspelling van transmissiwiteite en bergingskoëffisiënte nog nooit in Suid-Afrika gebruik nie. Inderwaarheid skyn dit asof Delhomme (1978) die enigste persoon is wat nog werklik aandag aan die moontlikheid geskenk het. Delhomme (1978) gebruik universele kriging in die daarstelling van transmissiwiteitskontoure. Sy werk toon dat logaritmiëse kriging in die geval van min datapunte goeie resultate lewer en dat die onsekerheid van die \underline{T} -verspreiding in die foutkaart weerspieël word. Hughes en Lettenmaier (1981) bevraagteken egter die gebruik van min datapunte (< 50) en

maak die bewering dat in so 'n geval kriging nie 'n veel beter metode as kleinste kwadraat passings is nie, behalwe miskien uit die oogpunt van die onsydige voorwaarde gesien.

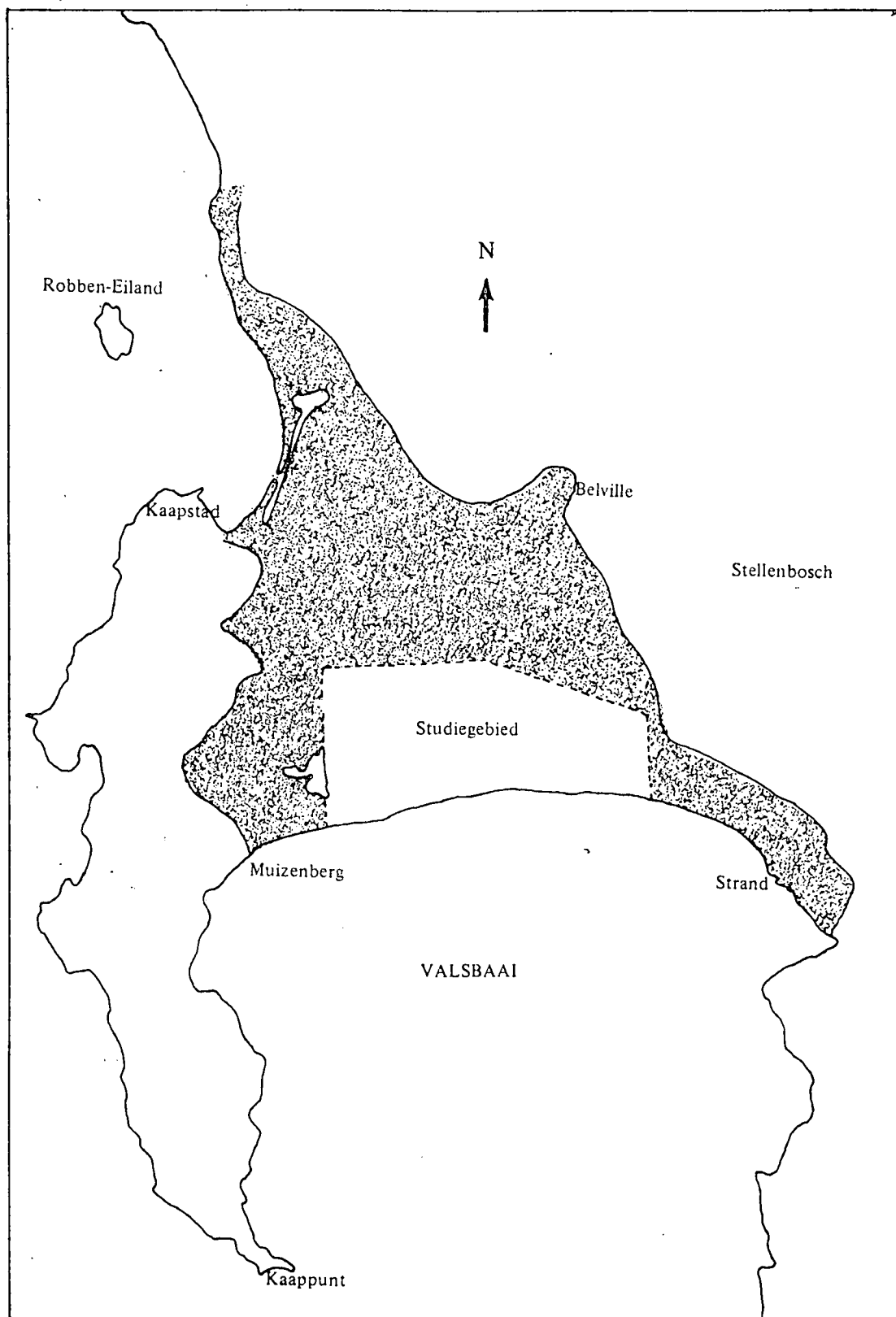
As gevolg van hierdie teenstrydige aansprake is daar besluit om opnuut na die probleem te kyk. Vir dié doel sal daar van T en S-waardes gebruik gemaak word, soos gemeet in dié Kaapse Vlakte-akwifer (Gerber; 1976).

Na 'n kort bespreking van die fisiese en geologiese eienskappe van die akwifer in paragraaf 3.2, sal verskillende krigingsmodelle vir die transmissiwiteit in paragraaf 3.3 bespreek word. In paragraaf 3.4 sal enkele van die kleinste kwadraat modelle, in paragraaf 1.3 bespreek, op dieselfde data toegepas word en die resultate met dié verkry in paragraaf 3.3 vergelyk word. Paragraaf 3.5 behandel die toepassing van die metodes op die bergingskoëffisiënte van die akwifer, terwyl in paragraaf 3.6 na veldtoepassings van kriging in modellering gekyk sal word.

3.2 DIE KAAPSE VLAKTE

Die Kaapse Vlakte is oos van Zeekoevlei langs die Valsbaaikus geleë (kyk figuur 3.2.1). Henzen (1973), Gerber (1976) en Wessels en Greeff (1980) het hierdie gebied geologies, geohidrologies en hidrologies ondersoek. Dit is grotendeels 'n met sandbedekte kusvlakte wat op 'n bodem van verweerde skalies en graniet afgeset is. Die sand het uit die verwering van kwartsiet en sandsteen van die Malmesburyformasie en Tafelbergserie ontstaan. Die wisselende seevlakhoogte het veroorsaak dat die sand in opeenvolgende lae afgeset is. Gevolglik besit die sand 'n heterogene stratifikasie en verskillende deurlatendhede.

Met inagneming van die aard van die sandafsetting, ondergrondse waterkwaliteit, potensiële opbergingsvermoë en die ligging van bestaande rioolswiweringswerke, kom Henzen (1973) tot die gevolgtrekking dat die gedeelte omlin deur die stippellyn in figuur 3.2.1, die grootste moontlikhede



Figuur 3.2.1. Geografiese ligging van die Kaapse Vlakte en studiegebied.

inhou vir die toepassing van kunsmatige aanvulling en die onttrekking van ondergrondse water.

Hierdie werk van Henzen is verder opgevolg deur Gerber (1976). Hy het pomptoetse by verskeie boorgate in genoemde gebied uitgevoer (kyk figuur 3.2.2 vir ligging van die boorgate). Met behulp van die gegewens was hy in staat om T en S -waardes by 70 boorgate te bepaal. Hierdie waardes word in bylae A gegee.

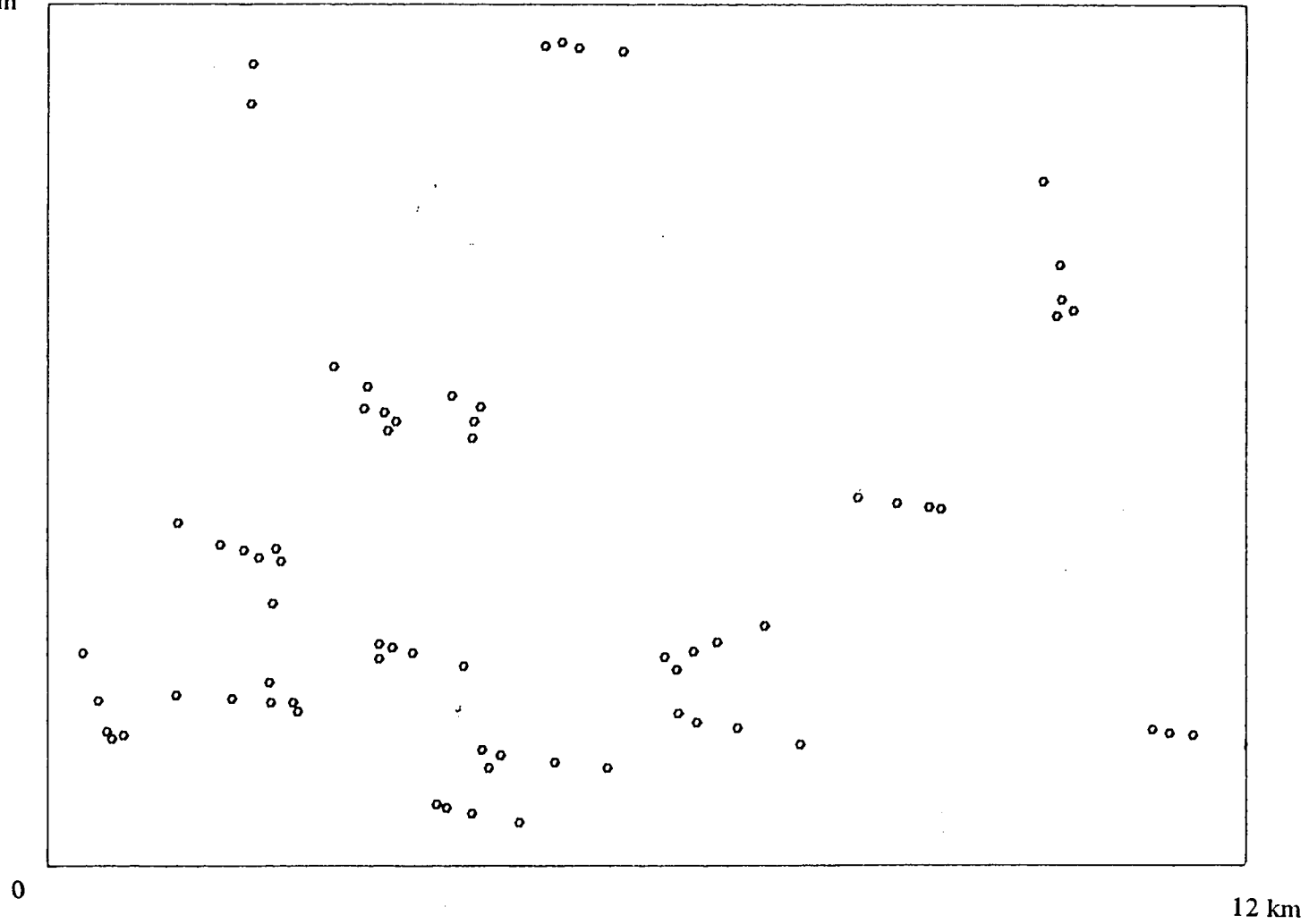
3.3 KRIGING VAN DIE TRANSMISSIWITEITE (T) VAN DIE KAAPSE VLAKTE

'n Interessante eienskap van die T -waardes is dat hulle tussen 30 en 890 m^2/dag wissel (kyk figuur 3.3.1). Daarbenewens kon Gerber ook geen sonale anisotropie in die transmissiwiteite waarneem nie. Dit vereenvoudig die ontleding aansienlik. Die eksperimentele semi-variogram in 'n N-S-rigting en O-W-rigting toon ook die afwesigheid van 'n geometriese anisotropie (kyk figuur 3.3.2) sodat slegs die gemiddelde semi-variogram (kyk figuur 3.3.3) beskou hoef te word. Hierdie semi-variogram toon 'n holte-effek en dui moontlik op die teenwoordigheid van genesde strukture.

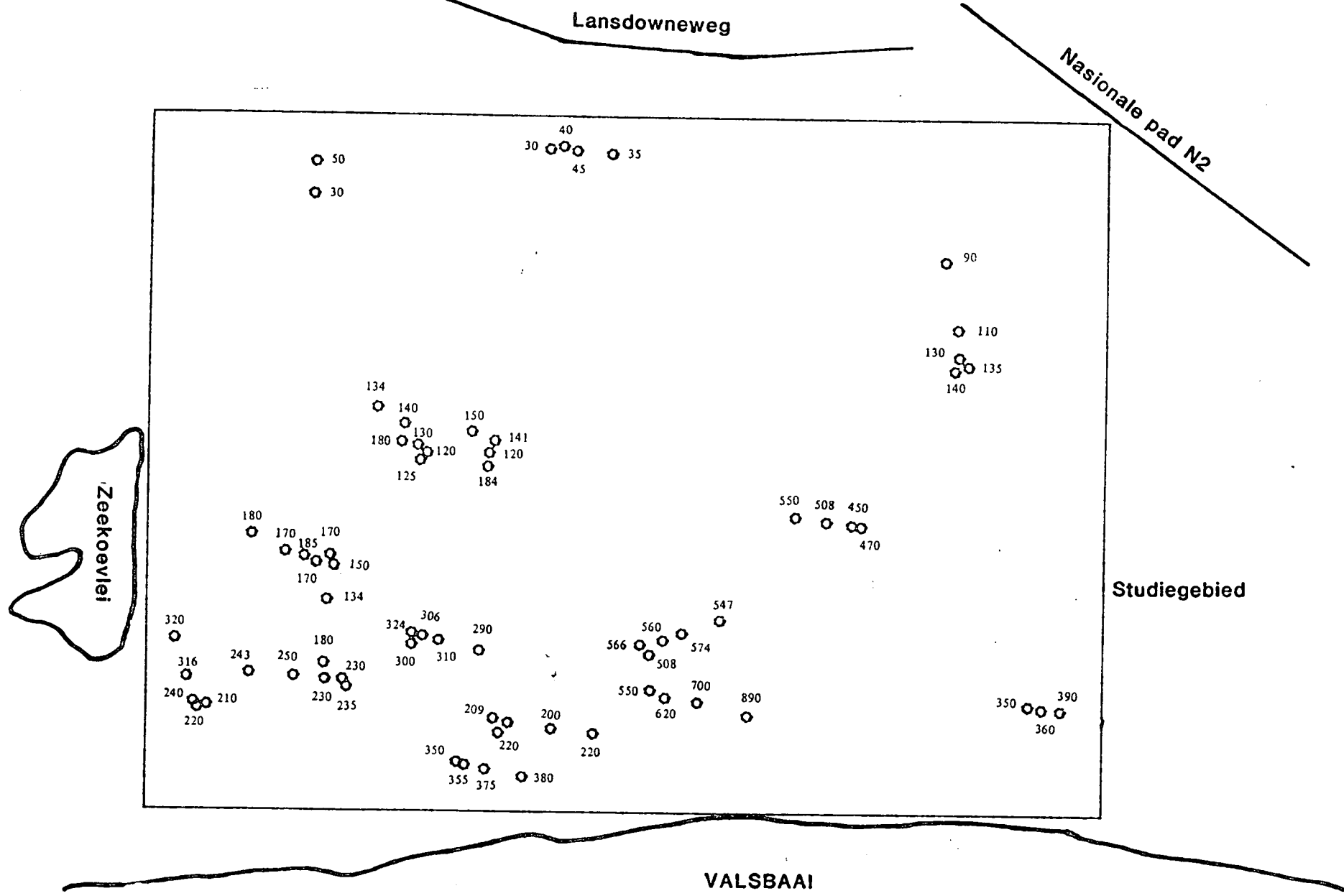
Verskeie krigingmodelle is getoets om te sien hoe krities die keuse van sodanige modelle ten opsigte van akkurate skattings is. Die model wat die eksperimentele semi-variogram die beste pas, is kleinste kwadraat latfunksies (kyk figuur 3.3.4). Dit is belangrik om daarop te let dat geen klonteffek teenwoordig is nie, sodat slegs die punte in die omgewing van 'n onbekende waarde wat bereken wil word, gebruik hoef te word in die kriging-sisteem.

Die verskillende semi-variogram passingsmodelle wat die gegewens die beste pas, is :

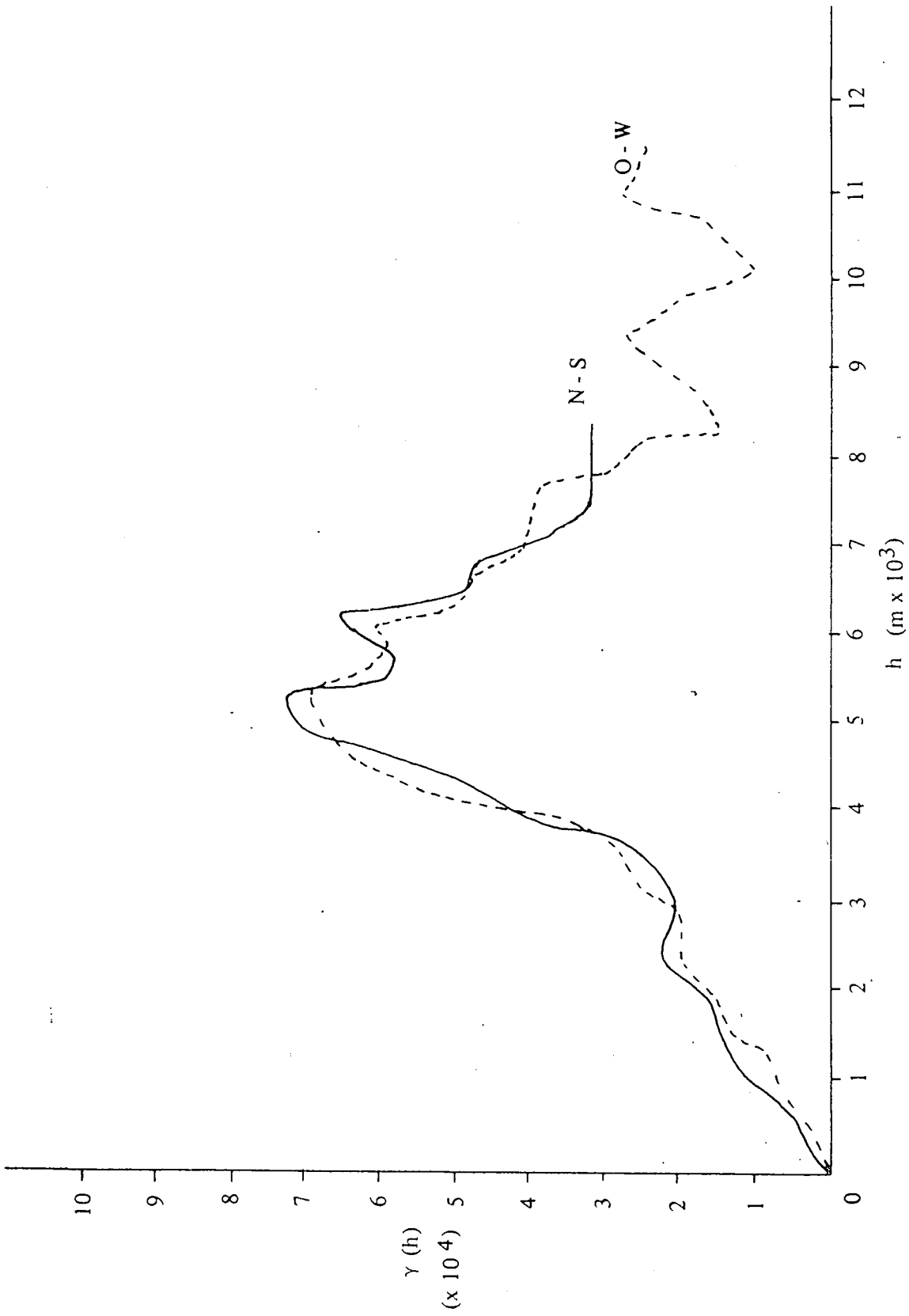
8 km



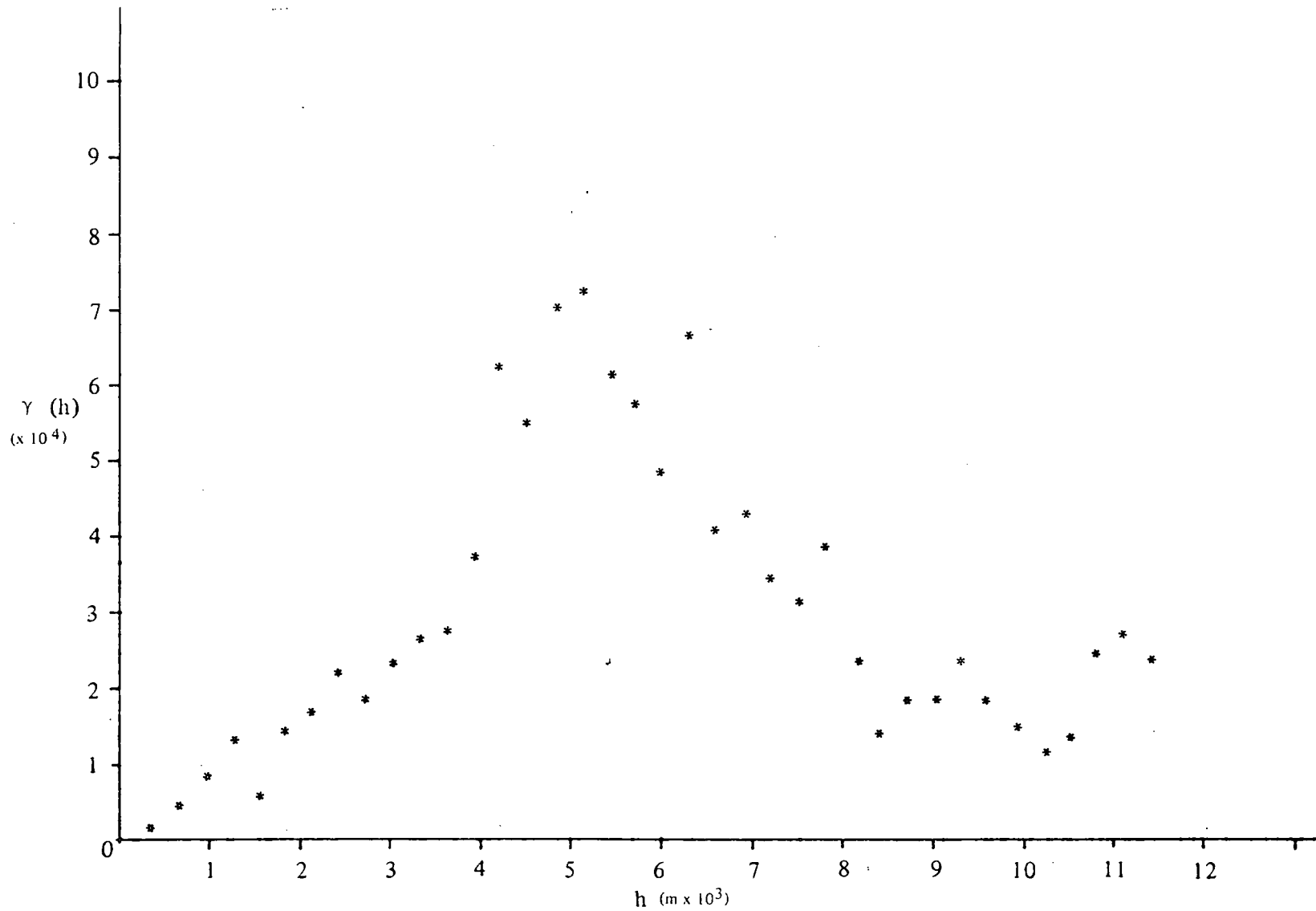
Figuur 3.2.2. Ligging van 70 boorgate in die Kaapse Vlakte waarby pomptoetse uitgevoer is.



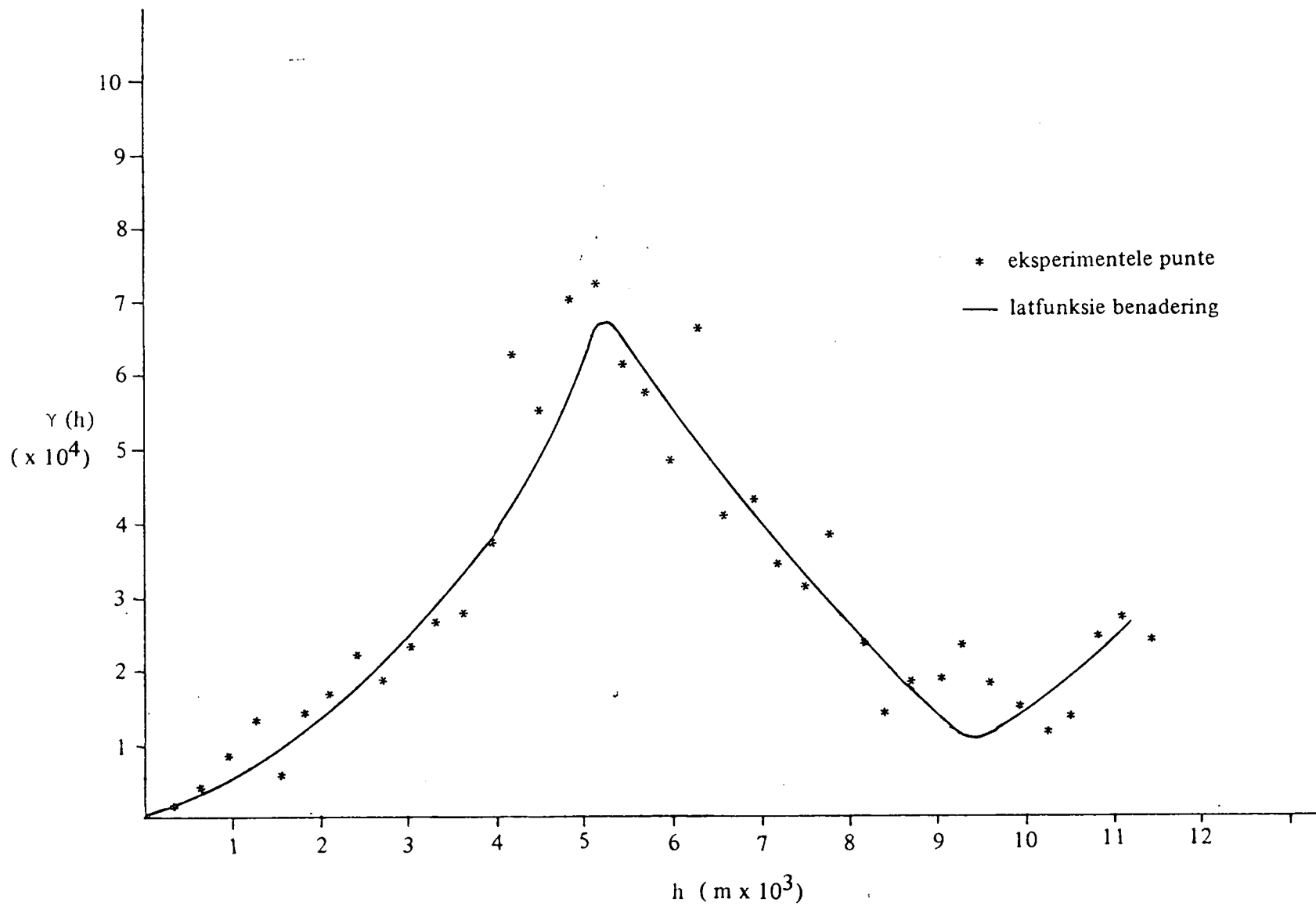
Figuur 3.3.1. Transmissiwiteitsverspreiding in die Kaapse Vlakte.



Figuur 3.3.2. Semi-variogramme van die transmissiwiteite in 'n N-S en O-W rigting. Punte is vir duidelikkheid met krommes verbind.



Figuur 3.3.3. Gemiddelde eksperimentele semi-variogram van die transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte.



Figuur 3.3.4. Kleinste kwadraat latfunksie passingsmodel van die eksperimentele semi-variogram van die transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte.

(a) Die sferiese model

$$\gamma(h) = \begin{cases} 31\,300 \left[1,5 \frac{h}{4\,000} - 0,5 \left(\frac{h}{4\,000} \right)^3 \right] & , h \leq 4\,000 \\ 31\,300 & , h > 4\,000 \end{cases}$$

(b) Die $\gamma = ah^\theta$ model

$$\gamma(h) = 0,16 h^{1,5}$$

(c) Die logaritmiese model

$$\gamma(h) = 1 \times 10^{-6} h^{1,6}$$

(d) Die veralgemeende kovarians van orde 0 model

$$K(h) = 1,67 \times 10^3 - 0,417 h$$

(e) Kleinste kwadraat latfunksies

Regverdiging vir die gebruik van model (c) hierbo, spruit uit die feit dat transmissiwiteite dikwels lognormaal verdeel is. In die geval van die T-waardes van die Kaapse Vlakte het Nelson (1981) se toets vir normaliteit getoon dat die T-waardes wel normaal verdeel is; die berekende toetsparameter $r = 0,373 <$ die afsnywaarde van $0,378$ vir 'n betekenispeil van $0,05$. Omdat hierdie toetsparameter naby die afsnywaarde lê, is besluit om model (c) nogtans te behou in vergelykingstudie. Die toetsstatistieke

$$\text{KGF} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_i^*) = \text{kriging gemiddelde fout}$$

$$\text{en } \text{KSS} = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{Z_i - Z_i^*}{\sigma_K} \right)^2 \right)^{1/2} = \text{krigingstandaardafwyking stabiliteit}$$

waar Z_1^* die berekende waarde van Z_1 is en σ_K die krigingstandaardafwyking (kyk paragraaf 2.10) van bogenoemde modelle, word in tabel 3.3.1 getoon.

TABEL 3.3.1. TOETSSTATISTIEKE VAN DIE VYF SEMI-VARIOGRAM MODELLE (a) SFERIES, (b) ah^θ , (c) LOGARITMIES, (d) VERALGEMEENDE KOVARIANS EN (e) LATFUNKSIES VIR DIE TRANSMISSIWITEITE VAN DIE KAAPSE VLAKTE

	MODEL				
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)
KGF	-0,51	-1,2	-0,9	-0,6	-0,2
KSS	0,34	0,26	1,31	1,32	0,89

Gegrand op teoretiese oorwegings behoort die model met 'n $KGF \approx 0$ en $KSS \approx 1$ die beste resultate te lewer. Met hierdie grense in gedagte, moet aanvaar word dat die kleinste kwadraat latfunksie model die gegewe data die beste pas, alhoewel al die ander modelle nie statisties heeltemal uitgesluit kan word nie. Hierdie gedrag kan beslis toegeskryf word aan die holte-effek teenwoordig in die semi-variogram, wat nie so goed deur die ander modelle benader kan word nie. Soos reeds genoem, is die effek waarskynlik aanwesig weens die teenwoordigheid van genesde strukture in die gebied. Daar is gevolglik besluit om die gebied op te deel in kleiner gebiede en elke deelgebied afsonderlik te ondersoek. Weens die klein aantal waardes beskikbaar, kan daar slegs hoogstens drie sulke gebiede afgebaken word. Die semi-variogramme vir elk van die gebiede het egter die soortgelyke gedrag van die globale semi-variogram in figuur 3.3.4 vertoon. As genesde strukture dus 'n rol speel in die bepaling van die semi-variogram, is al gevolgtrekking wat uit bogenoemde resultate afgelei kan word, dat die genesde strukture se afmetings kleiner is as dié wat in die ondersoek gebruik kon word.

Dit mag natuurlik ook wees dat die holte-effek aan ander fisiese verskynsels, soos prosesse wat werklik vir die afsetting verantwoordelik was, toegeskryf kan word. Om hierdie verskynsel volledig te verklaar, sal egter 'n baie meer volledige ondersoek van die gebied uitgevoer moet word. Gegrond op die resultate wat met die deelgebiede behaal is, sal daar vervolgens aanvaar word dat die holte-effek 'n inherente eienskap van die semi-variogram van die transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte-akwifereer is.

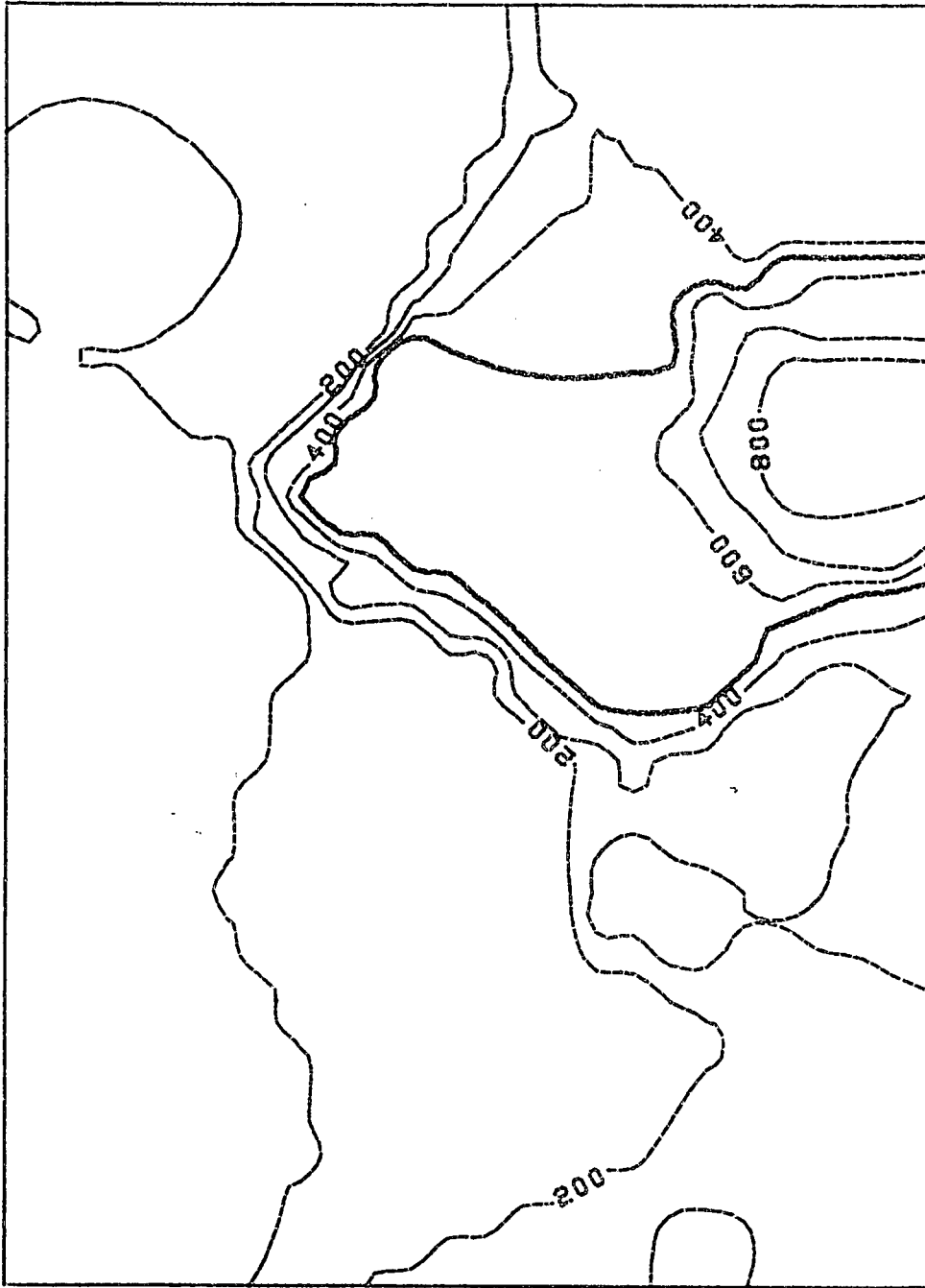
Kontoerkaarte van die T-waardes wat verkry is met die vyf verskillende modelle, word in figure 3.3.5 tot 3.3.9 getoon. Soos wat verwag kan word uit die statistiese ontleding in tabel 3.3.1, is daar nie besondere groot afwykings tussen die verskillende kaarte nie. Die enigste werklik opmerkbare verskil is die boog teenwoordig in die $100 \text{ m}^2/\text{dag}$ kontoer verkry met die sferiese model. Dit wil dus voorkom asof die sferiese model minder geskik vir gebruik by die kriging van transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte is.

Alhoewel kontoerkaarte nog die aanvaarde manier is vir die voorstelling van geohidrologiese data, lei 'n driedimensionale voorstelling dikwels tot meer insigte in die gedrag van 'n geohidrologiese grootte. So 'n driedimensionale voorstelling van die transmissiwiteite (bepaal met die latfunksie semi-variogram), word vir latere verwysing in figuur 3.3.10 getoon.

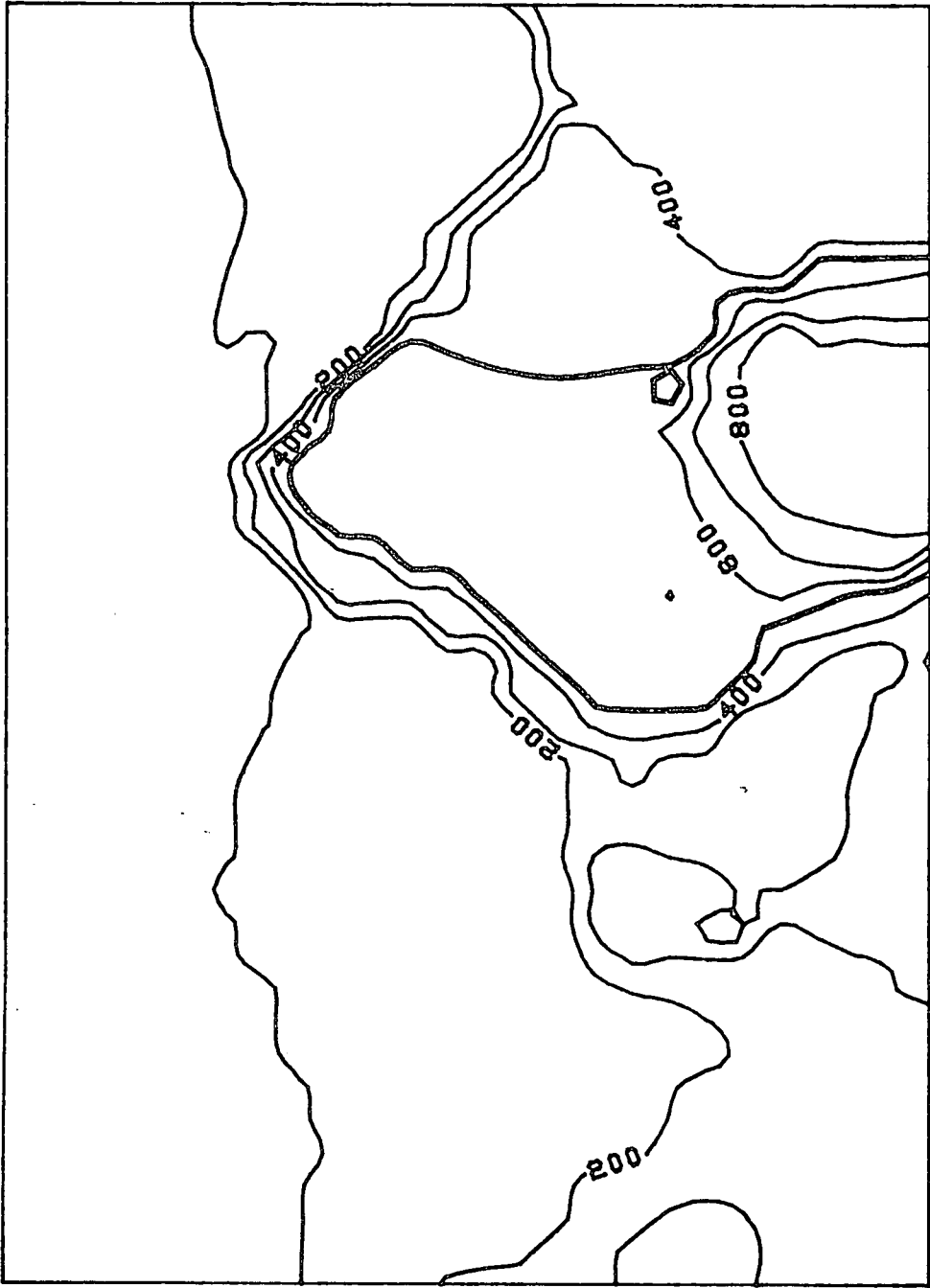
3.4 KLEINSTE KWADRAAT-MODEL EN AGM

Om 'n vergelyking tussen kriging en ander metodes te tref, is twee metodes, naamlik tendensanalise (kyk paragraaf 1.2.2) en AGM (kyk paragraaf 1.3), op die transmissiwiteite van die Kaapse Vlakte toegepas.

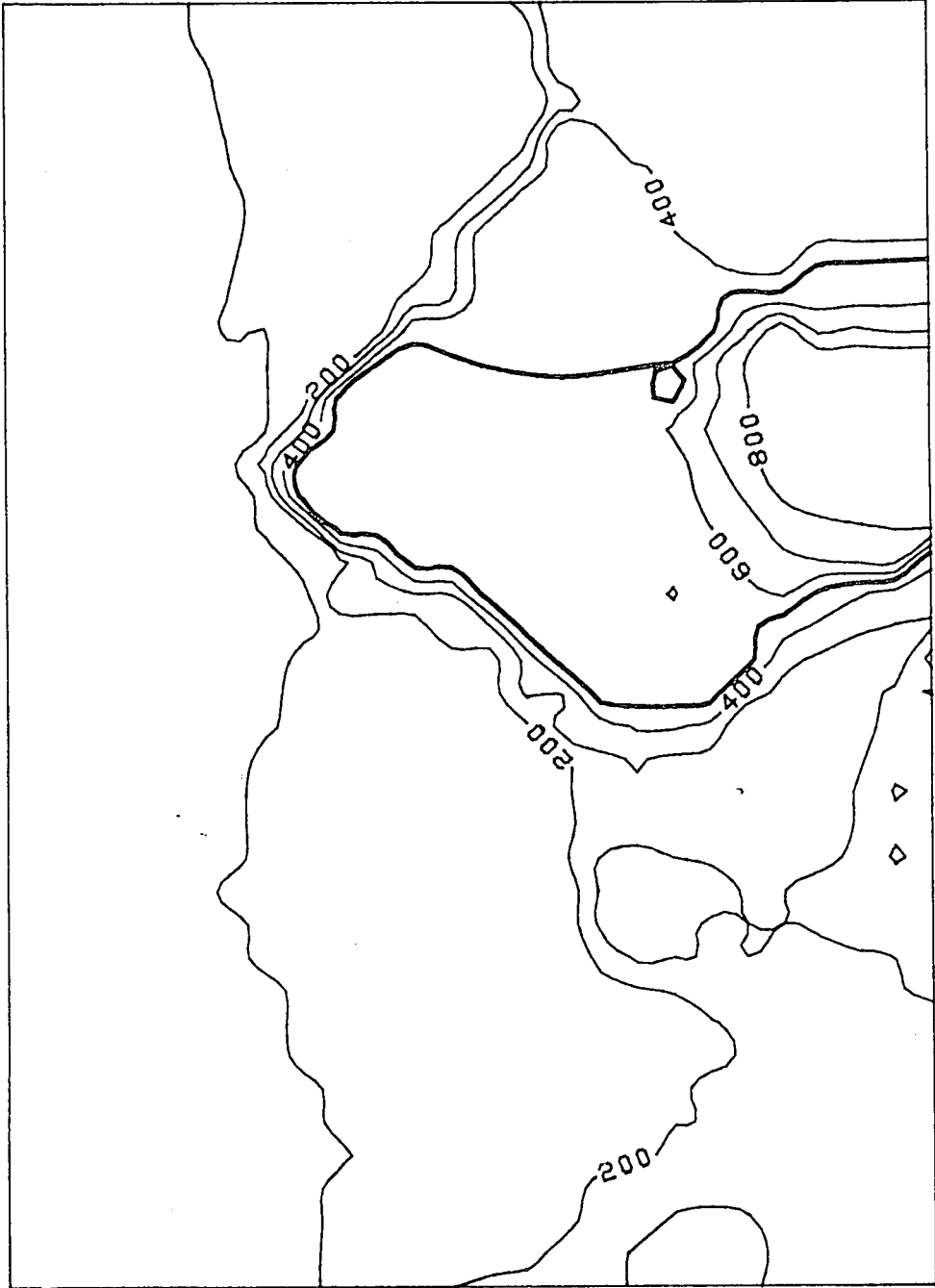
Die eenvoudigste manier om die waardes verkry, te vergelyk met die krigingwaardes is waarskynlik 'n vergelyking van hierdie kontoerkaarte (kyk figure 3.4.1 en 3.4.2) verkry met hierdie metodes en dié verkry met kriging



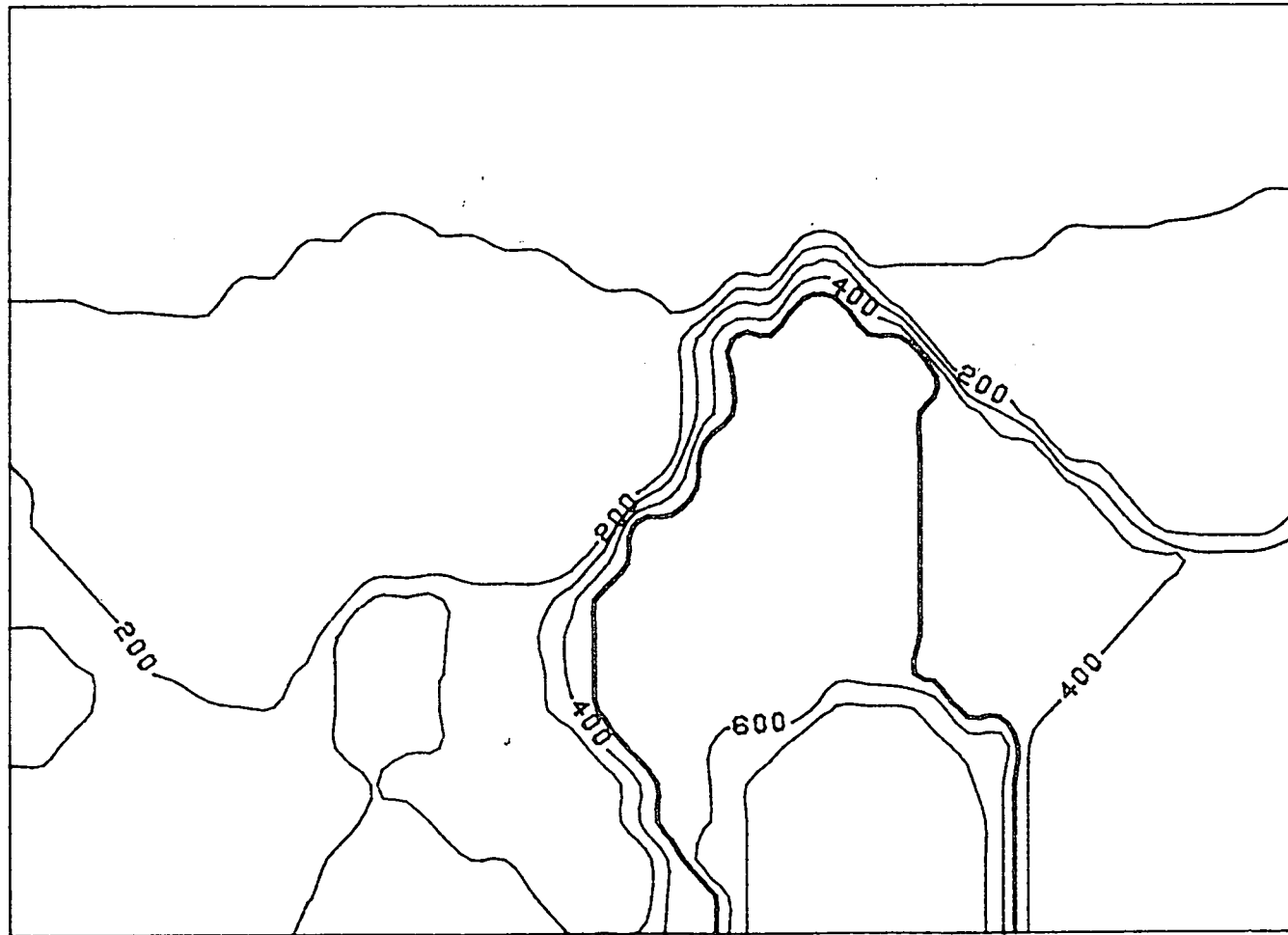
Figuur 3.3.5. Transmissiwiteitskontoure van die Kaapse Vlakte soos verkry met 'n sferiese passingsmodel.



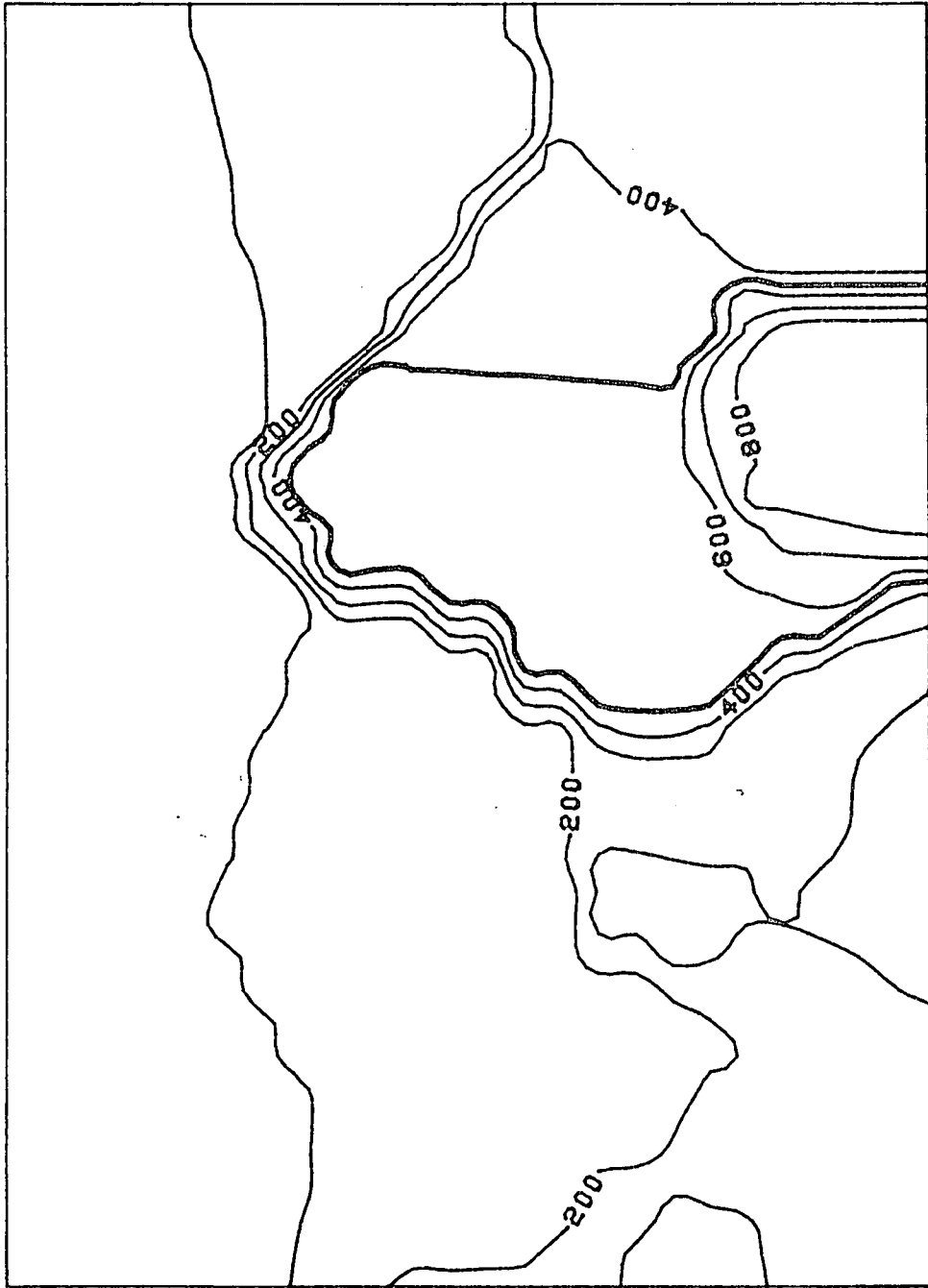
Figuur 3.3.6. Transmissiwiteitskontoure van die Kaapse Vlakte soos met die model $\gamma(h) = 0,16 h^{1,5}$ verkry.



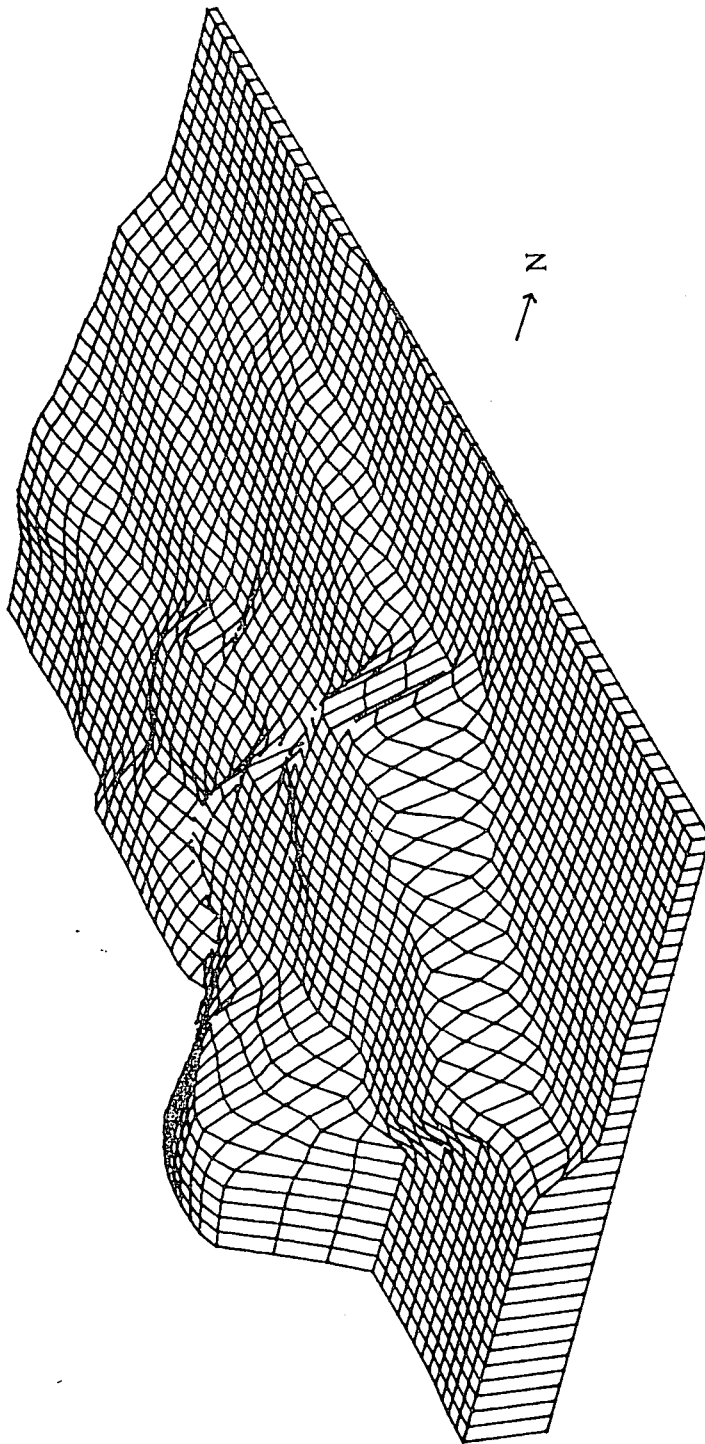
Figuur 3.3.7. Transmissiwiteitskontoure van die Kaapse Vlakte soos met 'n logaritmiëse model verkry.



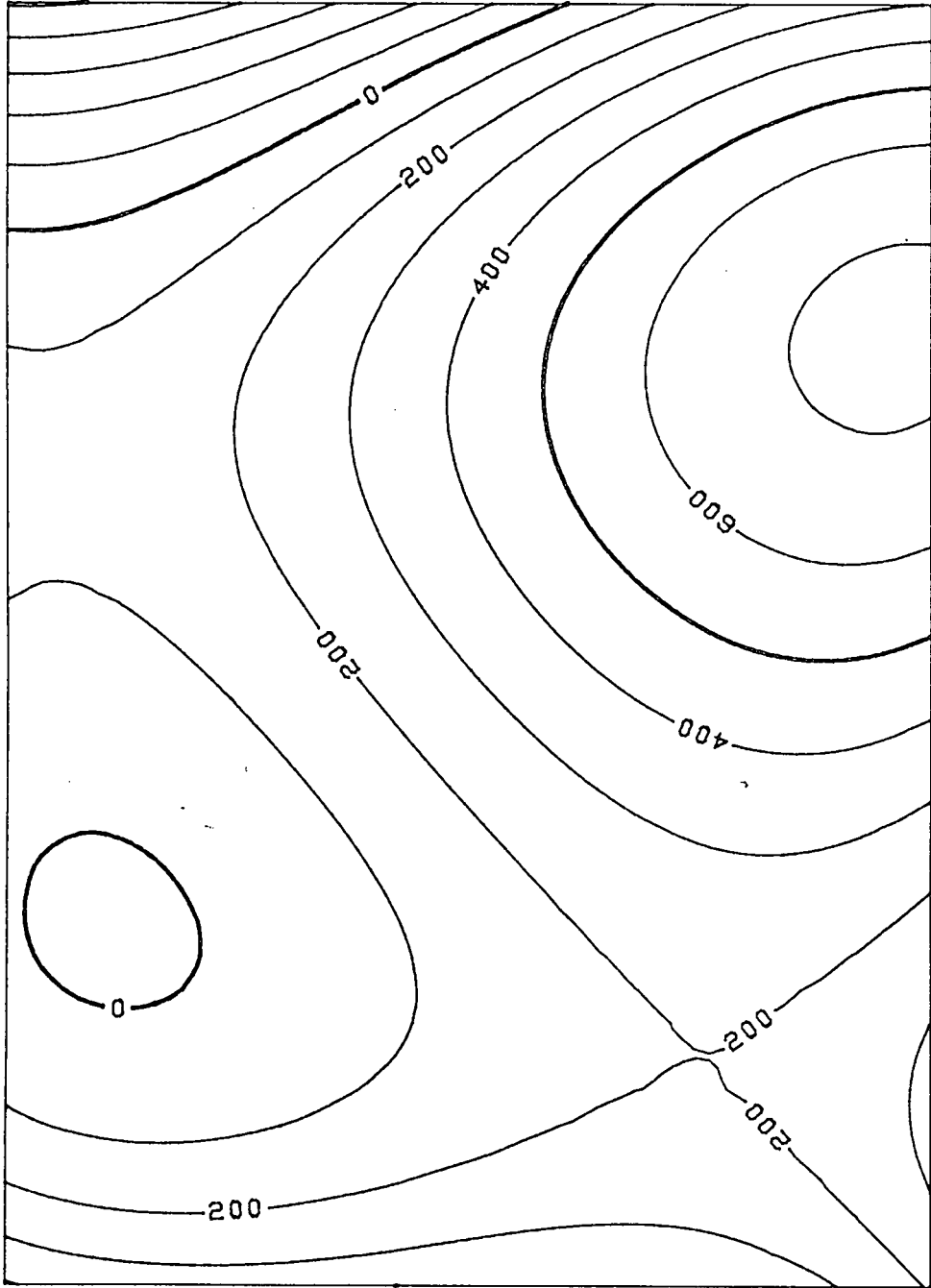
Figuur 3.3.8. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met intrinsieke funksies van orde 0 verkry.



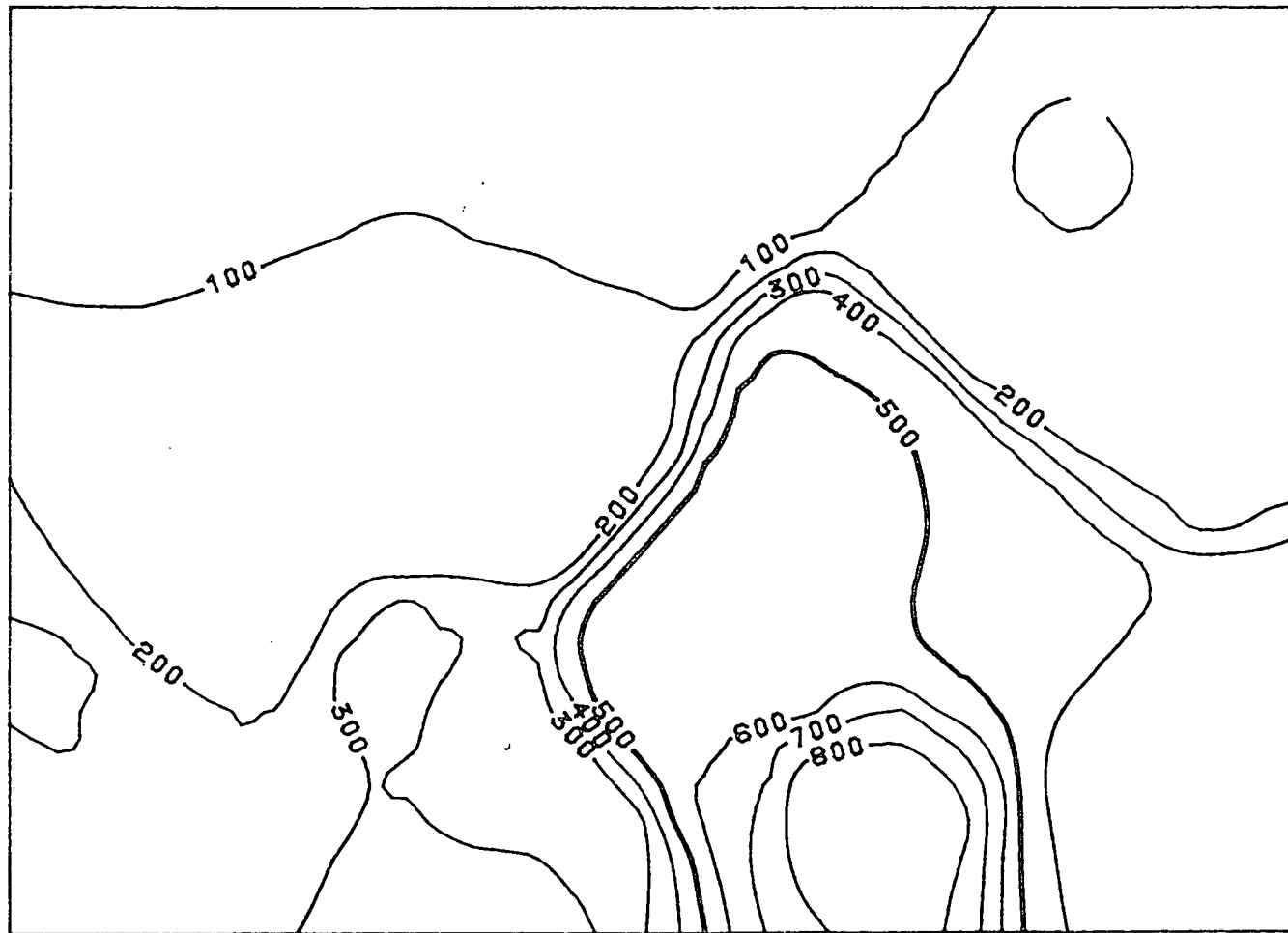
Figuur 3.3.9. Transmissiviteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met kleinste kwadraat laffunksies verkry.



Figuur 3.3.10. Driedimensionale voorstelling van die transmissiwiteite in die Kaapse Vlakte.



Figuur 3.4.1. Transmissiwiteitskontoure van die Kaapse Vlakte soos met 'n derdegraadse tendensanalise verkry.



Figuur 3.4.2. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos met die afstandsgeweege metode (AGM) verkry.

(kyk figure 3.3.6 tot 3.3.9, veral figuur 3.3.9). Daaruit blyk dat alhoewel die AGM-kontoerkaart redelik goed ooreenstem met die krigingkaarte, die tendensanalise-kaart totaal daarvan afwyk. Aangesien dieselfde gedrag ook verkry is met tendensanalises van grade 1 en 2, kan daar met 'n redelike mate van sekerheid beweer word dat tendensanalise nie besonder geskik is vir die ontleding van transmissiwiteite nie.

'n Meer objektiewe vergelyking kan verkry word deur die gemiddelde fout

$$GF = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_i - Z_i^*)$$

van die twee metodes te vergelyk met dié van kriging soos in tabel 3.4.1.

**TABEL 3.4.1. 'N VERGELYKING VAN GF VIR DIE TENDENS-
ANALISE, AGM EN KRIGINGBENADERING VAN DIE
TRANSMISSIWITEITE IN DIE KAAPSE VLAKTE-AKWIFEER**

<i>Tendensanalise</i>	<i>AGM</i>	<i>Kriging</i>
- 8,3	- 2,1	- 0,2

'n Ander manier van vergelyking is om eksperimentele datapunte uit die sisteem te verwyder en dan weer te voorspel. Waardes op die manier verkry met behulp van

- (i) kleinste kwadraat latfunksie kriging,
- (ii) AGM en
- (iii) tendensanalise van graad 3

word in tabel 3.4.2 getoon. Hieruit is dit duidelik dat die krigingresultate by die oorgrote meerderheid van punte die beste resultate gelewer het.

TABEL 3.4.2. VERSKIL TUSSEN VOORSPELDE T-WAARDES EN
 EKSPERIMENTELE T-WAARDES MET (i) KRIGING, (ii) AGM EN
 (iii) TENDENSANALISE

Transmissiwiteit	METODE		
	(i)	(ii)	(iii)
320	- 12,6	- 70,7	- 2,6
260	0,1	- 1,6	-17,3
230	2,7	- 5,1	34,7
170	- 3,7	- 8,0	-23,7
310	-17,2	- 13,7	48,7
355	- 2,1	-28,9	81,4
890	-98,7	-283,2	229,4
508	- 3,0	- 27,8	7,9
360	2,4	14,7	- 83,7
150	- 9,2	- 12,0	4,3
110	1,7	45,2	5,8
50	-15,0	- 1,9	13,3
45	- 6,5	14,9	- 30,0

Dit volg uit die voorafgaande bespreking dat van al die metodes wat hier bespreek is, die krigingmodel gebaseer op die kleinste kwadraat latfunksie semi-variogram, die beste resultate gelewer het.

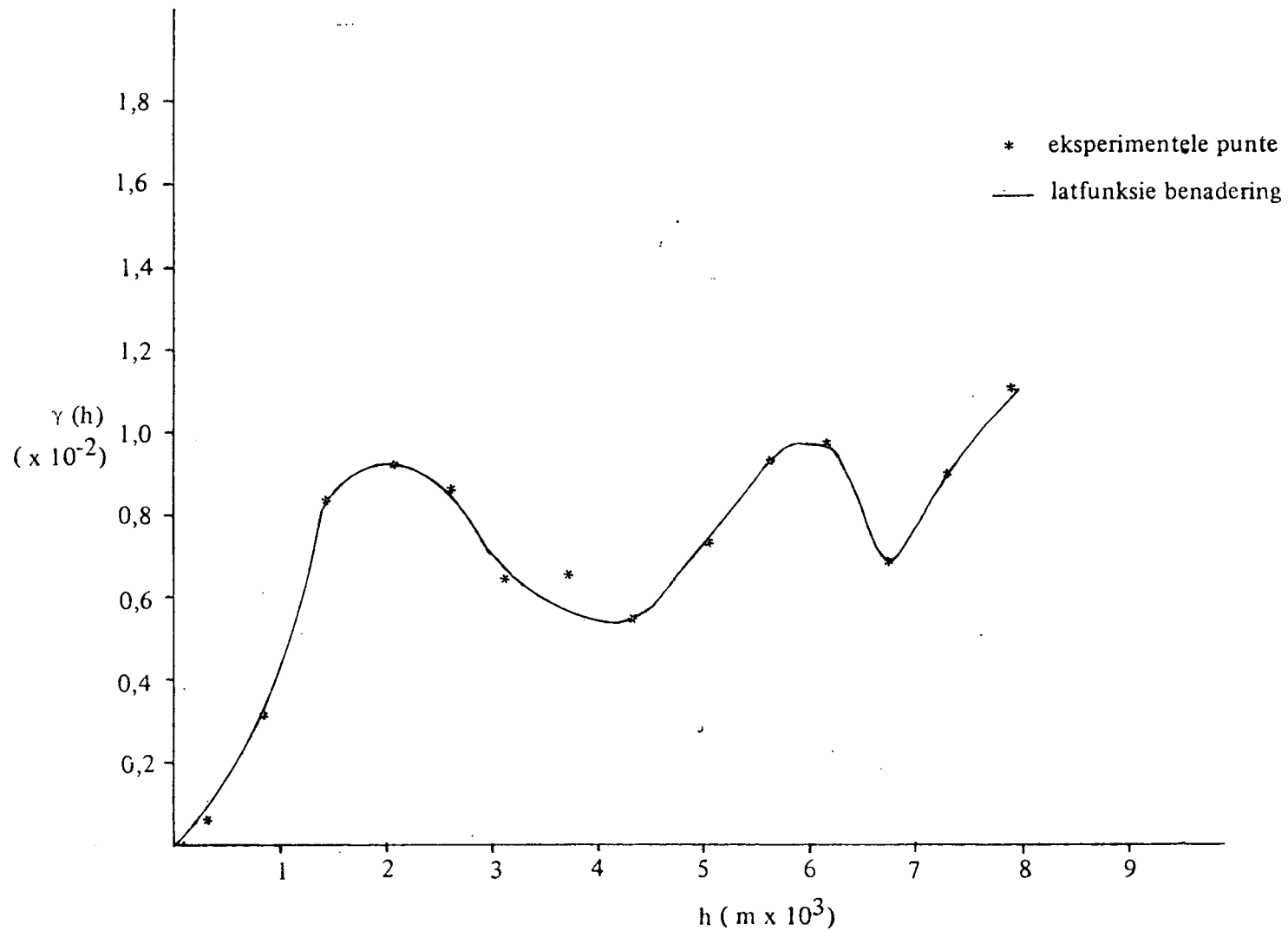
Dit mag egter nodig wees, soos deur Delhomme (1978 en 1979) aangetoon, dat by ondersoek van die transmissiwiteite van ander akwifere, 'n logaritmiëse transformasie van die T-waardes nodig is voordat kriging toegepas word. Gewoonlik voldoen die logaritmiëse transformasie aan die intrinsieke hipotese voorwaarde (Delhomme; 1979), sodat universele kriging nie gebruik hoef te word nie.

3.5 KRIGING VAN DIE BERGINGSKOËFFISIËNTE (S) VAN DIE KAAPSE VLAKTE

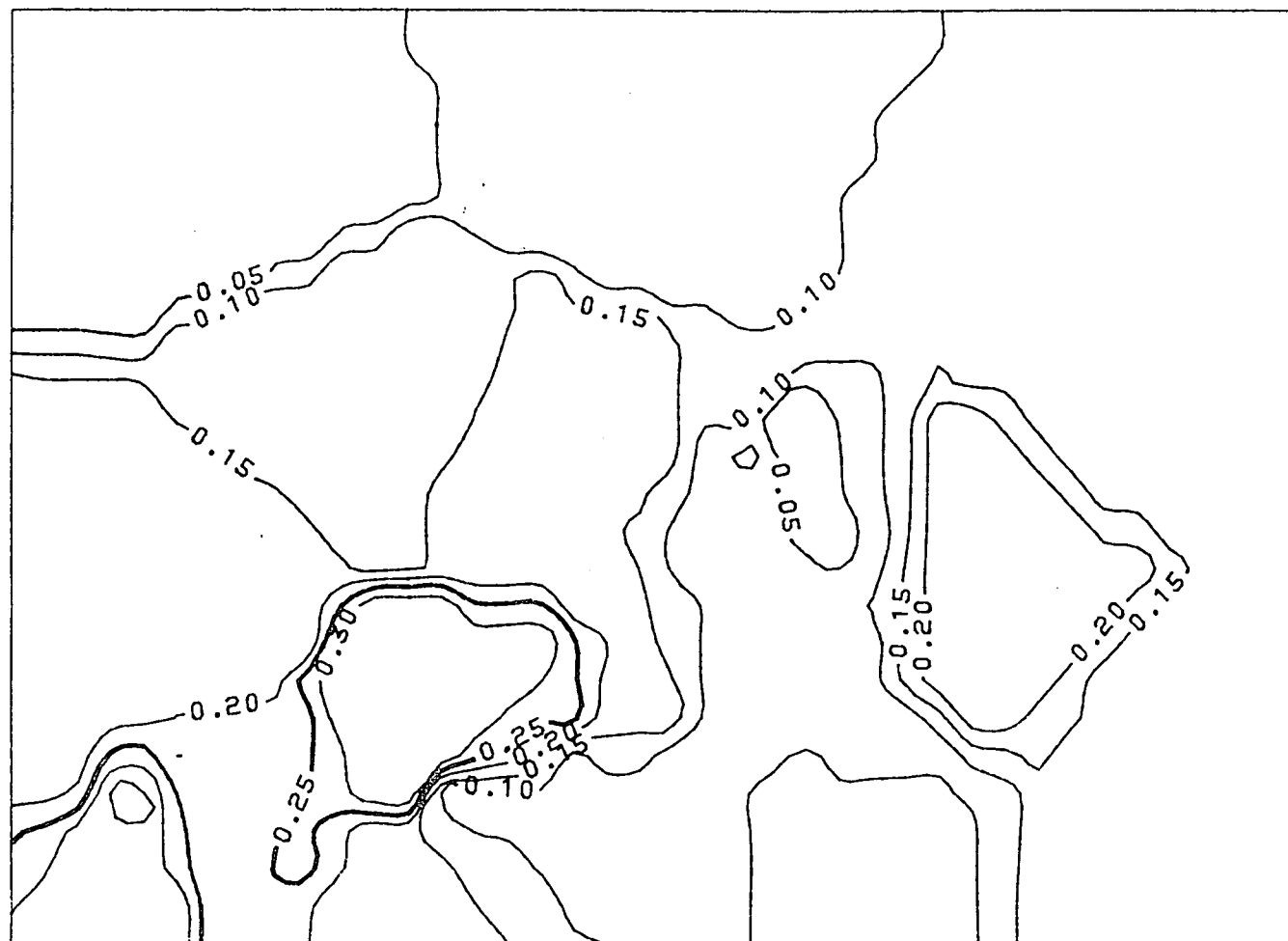
Die bergingskoëffisiënte in die Kaapse Vlakte wissel tussen 0,002 en 0,35 en is ook, net soos die transmissiwiteite, uit pomptoetsresultate bereken. Die eksperimentele semi-variogram (kyk figuur 3.5.1) toon weer eens 'n holte-effek, inderwaarheid 'n dubbele holte-effek, alhoewel nie so duidelik as by die transmissiwiteite nie. 'n Mens kan hierdie gedrag moontlik aan eksperimentele foute in die waargenome data toeskryf. Dit sou beteken dat die sferiese model in hierdie geval ook besonder goeie resultate behoort te lewer. 'n Ontleding van dieselfde krigingmodelle as in paragraaf 3.3 toon egter dat die kleinste kwadraat latfunksie model met 'n KGF van 0,0024 en 'n KSS van 1,28 weer eens die beste resultate lewer, sodat die dubbele holte-effek in die semi-variogram van die S-data werklik skyn te wees. Die S-kontoure op hierdie manier verkry, word in figuur 3.5.2 en die ooreenstemmende driedimensionale voorstelling in figuur 3.5.3 getoon. 'n Vergelyking van figure 3.5.3 en 3.3.10 bevestig maar weer eens net die bekende feit dat hoë S-waardes nie noodwendig met hoë T-waardes gekoppel is nie en omgekeerd. Ten einde 'n vergelyking tussen kriging en ander benaderingsmetodes te tref, is datapunte weer eens uit die sisteem verwyder en dan met behulp van die benaderingsmetodes voorspel. Waardes op hierdie manier met behulp van

- (i) kriging gebaseer op die kleinste kwadraat latfunksie semi-variogram,
- (ii) die AGM en
- (iii) tendensanalise van graad 3

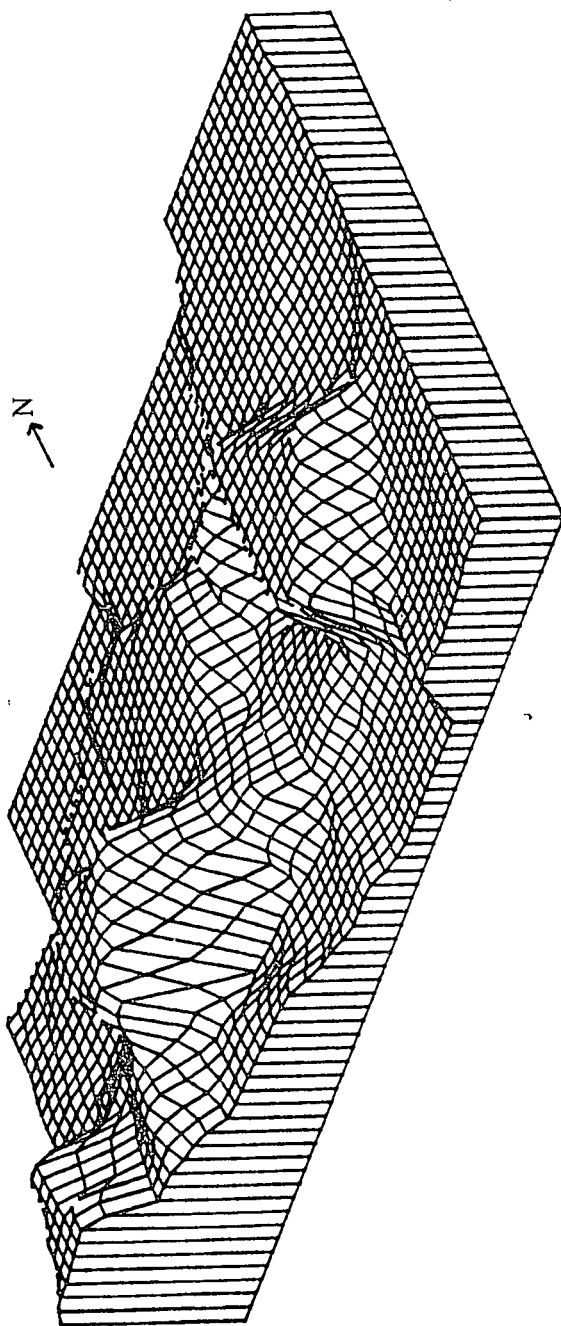
bereken, word in tabel 3.5.1 gegee. Hierdie resultate toon weer eens dat kriging 'n besondere geskikte metode vir die voorspelling van S-waardes is.



Figuur 3.5.1. Eksperimentele semi-variogram van die bergingskoeffisiënte in die Kaapse Vlakte met kleinste kwadraat latfunksies as passing.



Figuur 3.5.2. Kontoure van die bergingskoeffisiënte in die Kaapse Vlakte soos vanaf 'n krigingmodel, gebaseer op 'n kleinste kwadraat latfunksie semi-variogram, verkry.



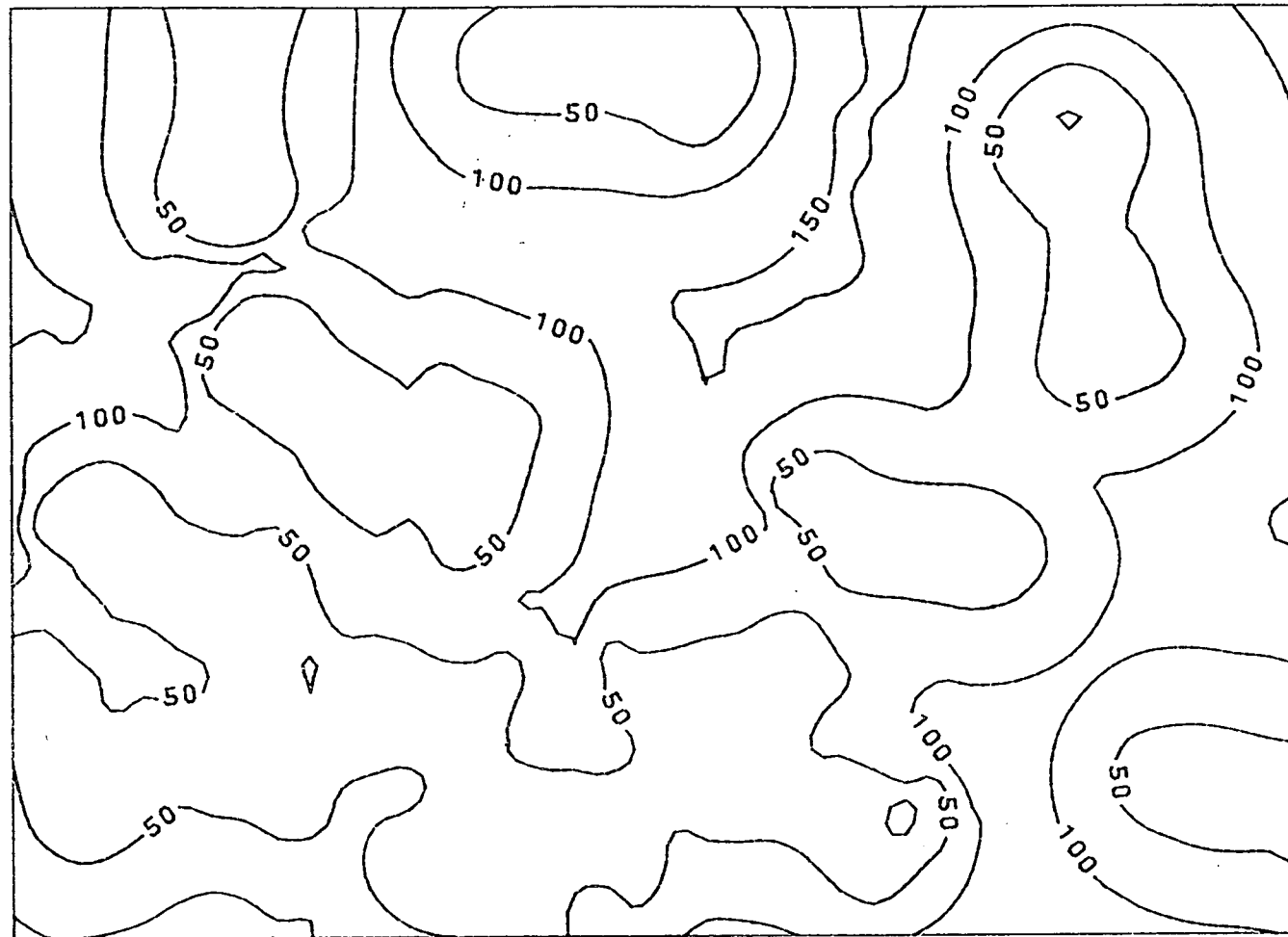
Figuur 3.5.3. Driedimensionale voorstelling van die bergingskoeffisiënt in die Kaapse Vlakte.

TABEL 3.5.1. VERSKIL TUSSEN VOORSPELDE S-WAARDES EN
 EKSPERIMENTELE S-WAARDES MET (i) KRIGING, (ii) AGM EN
 (iii) TENDENSANALISE

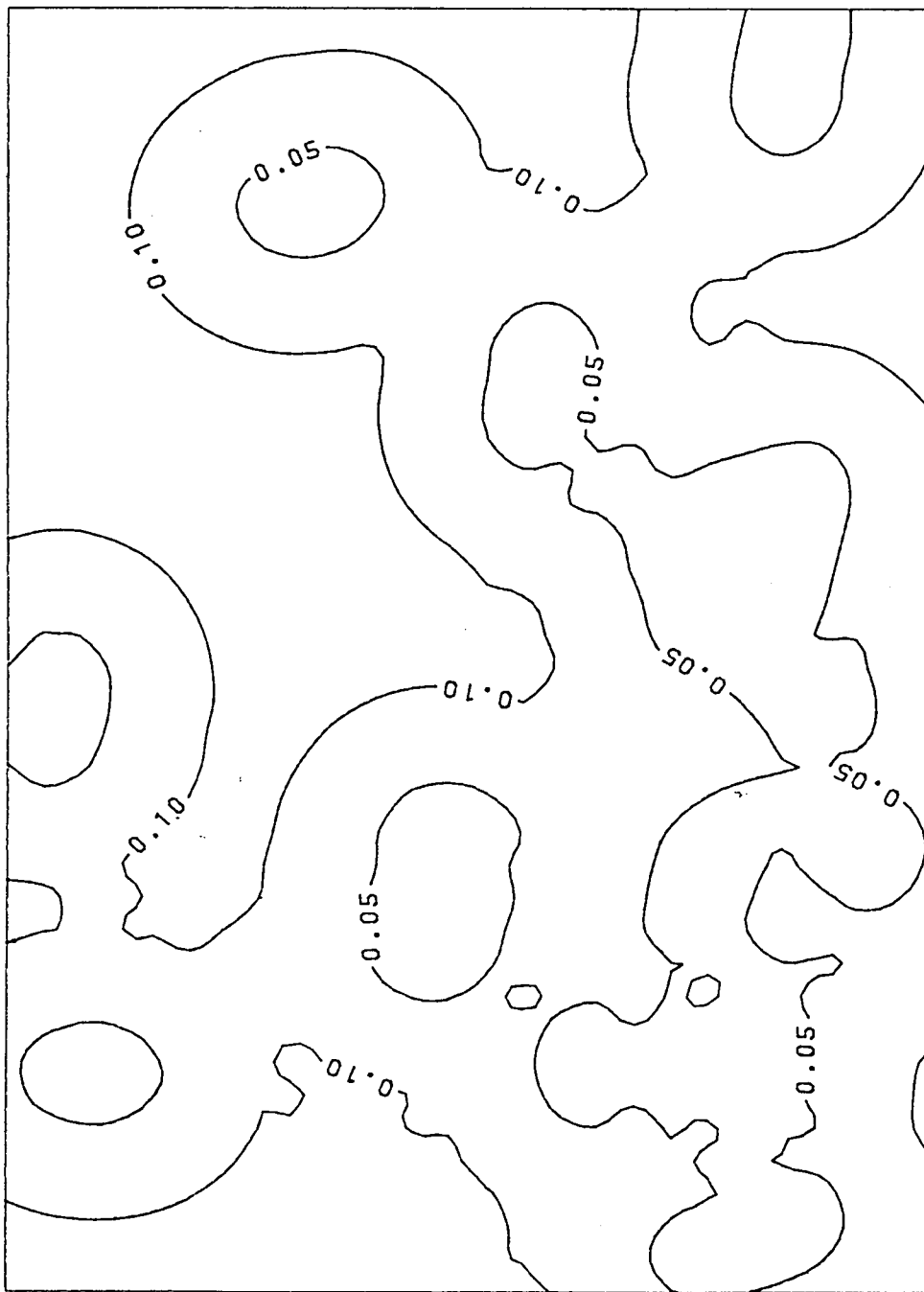
S-waarde	METODE		
	(i)	(ii)	(iii)
0,179	- 0,002	0,054	0,022
0,328	- 0,070	- 0,085	0,063
0,340	0,002	- 0,052	0,099
0,160	0,004	0,015	0,003
0,076	-0,001	0,021	0,006
0,090	-0,009	0,004	-0,039
0,044	0,007	0,026	0,059
0,229	0,001	-0,069	0,052
0,136	0,000	0,005	0,007
0,157	-0,001	-0,006	-0,002

3.6 VELDTOEPASSING VAN KRIGING IN MODELLERING

Soos in paragraaf 3.1 bespreek, is dit uit 'n modelleringsoogpunt belangrik dat 'n mens moet weet tussen watter foutgrense T en S-waardes verander mag word om die veldgegevens (watervlakke) te pas. Hiervoor kan die krigingstandaardafwykingskontoere, waarna in die vervolg verwys sal word as foutkaarte, handig te pas kom. Die 95 persent betroubaarheidsfoutkaarte van die T en S-kontoere van paragrawe 3.3 en 3.5, gebaseer op die latfunksie semi-variogram, word in figure 3.6.1 en 3.6.2 getoon. Hierdie foutkaarte toon duidelik die leemtes wat daar in data van die Kaapse Vlakte bestaan. So byvoorbeeld kan in die geval van die T-foutkaart, kontoerwaardes groter as 100 beskou word as 'n aanduiding dat daar onvoldoende



Figuur 3.6.1. Standaardafwykingskontoere van die geskatte transmissiwiteit in die Kaapse Vlakte. Waardes van 100 en groter kan as duidende op onvoldoende inligting beskou word.

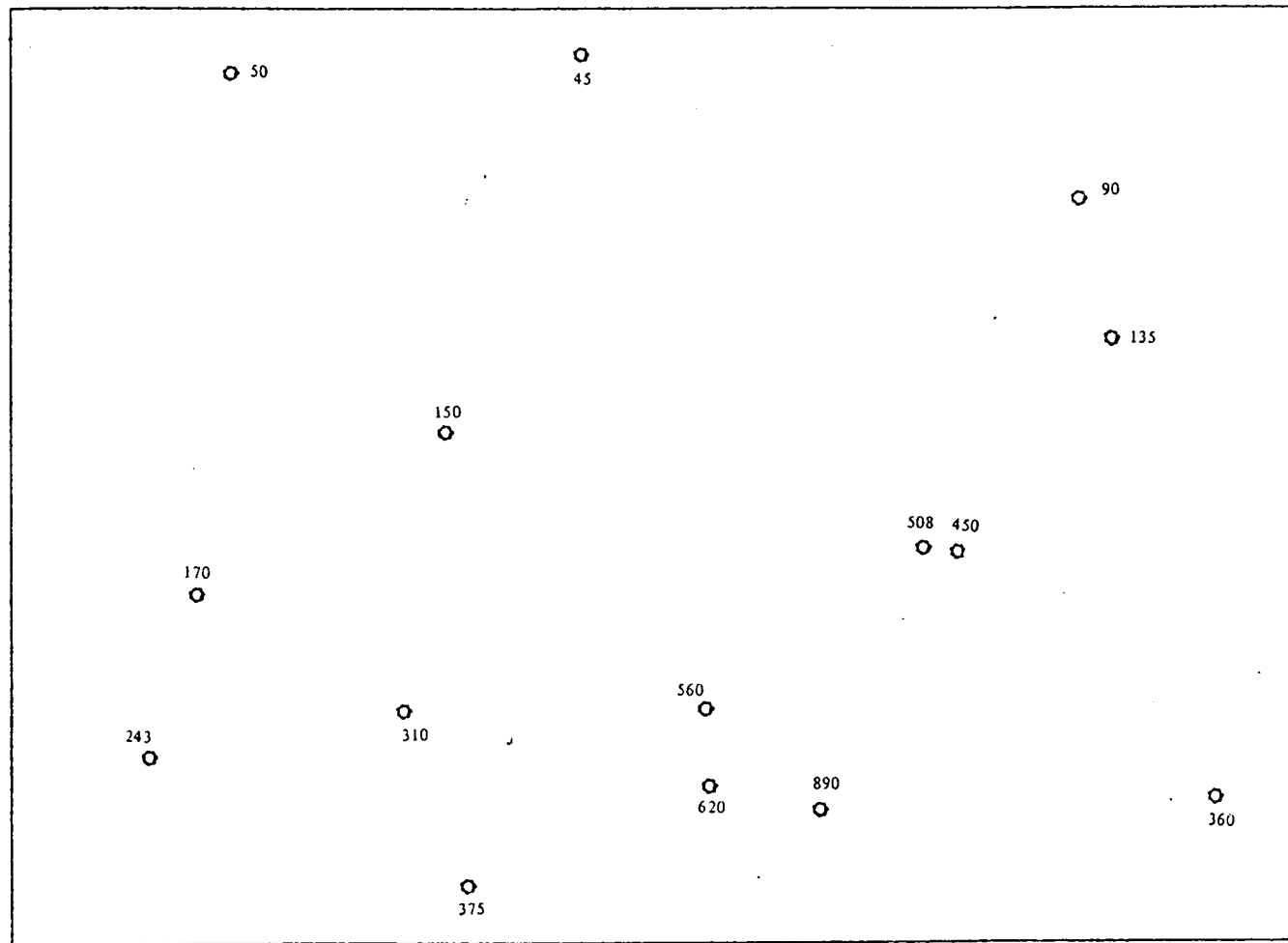


Figuur 3.6.2. Standaardafwykingskontoure van die geskatte bergingskoeffisiënte in die Kaapse Vlakte.

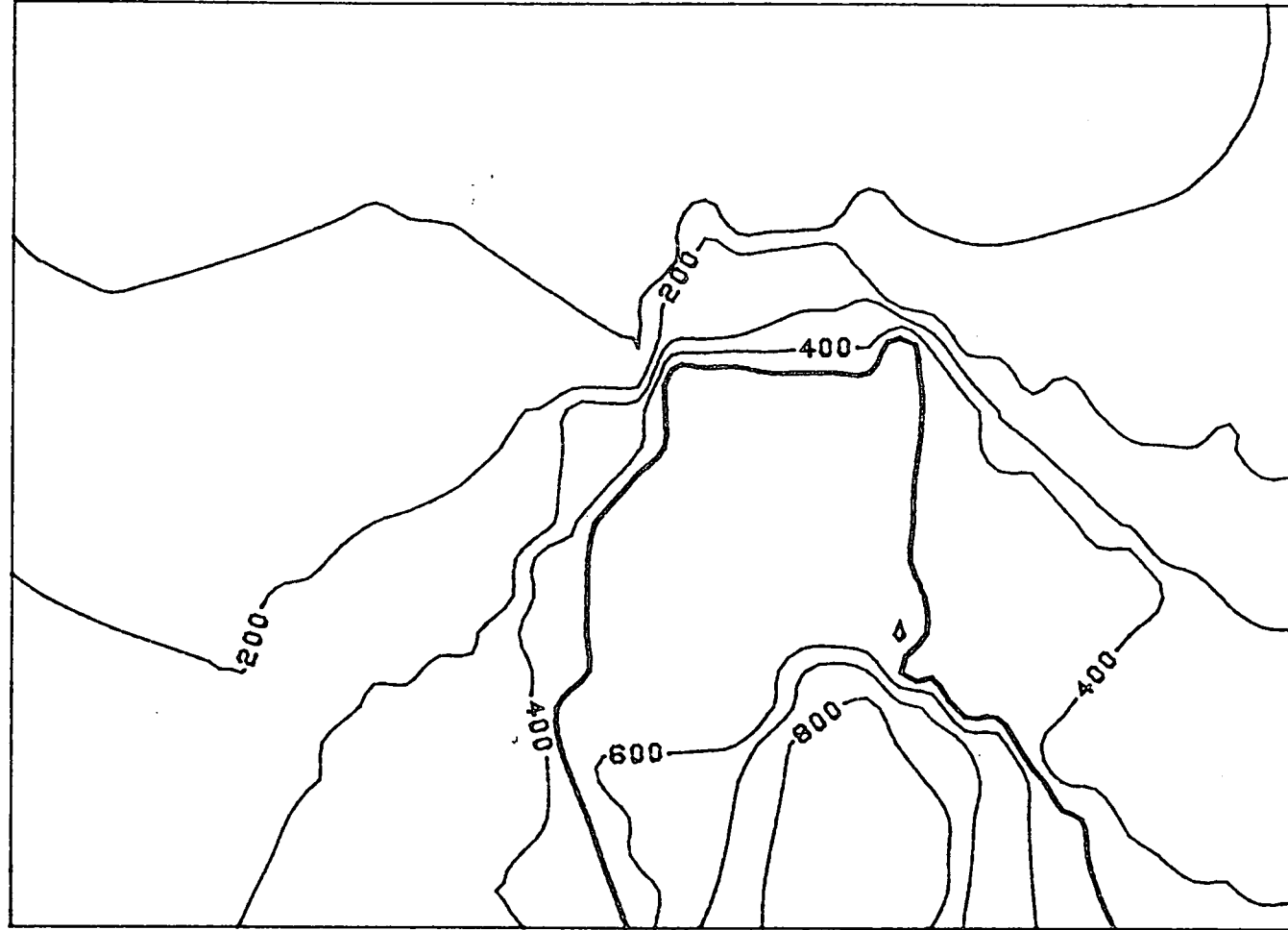
data beskikbaar is. Ekstra boorgate sal dus in hierdie gebiede gesink moet word vir die verkryging van meer betroubare T-kontoere. Soortgelyk wys die foutkaart van die S-kontoere dat by kontoere groter as 0,1 ekstra gegewens benodig word. Dit is interessant om daarop te let dat die grense van die gebiede met onvoldoende inligting feitlik dieselfde in figure 3.6.1 en 3.6.2 is. Dit beteken dat as nuwe boorgate gesink moet word, dieselfde boorgate gebruik kan word in die verbetering van beide T en S-waardes.

'n Interessante vraag wat by die gebruik van kriging in parameteridentifikasie opduik, is of 'n mens regtig al die T-waardes nodig het vir goeie skattings. Nieteenstaande die gebreke in die bestaande data, is daar tog besluit om te kyk of daar nie tot 'n mate 'n antwoord op die vraag verstrekkend kan word nie. Gevolglik is 15 verteenwoordigende boorgate (kyk figuur 3.6.3) uit die bestaande 70 gekies en gekrige. Die resultate vir die T-kontoere en die bybehorende foutkaart word in figure 3.6.4 en 3.6.5 getoon. Daarna is 'n verdere 10 boorgate (kyk figuur 3.6.6) by die 15 bygevoeg. Die 25 gesamentlike gekrige T-kontoere en foutkaart in hierdie geval verkry, word in figure 3.6.7 en 3.6.8 getoon. Vervolgens is die aantal boorgate vermeerder na 40 (kyk figuur 3.6.9). Sodoende is die T-kontoere en foutkaart van figure 3.6.10 en 3.6.11 verkry.

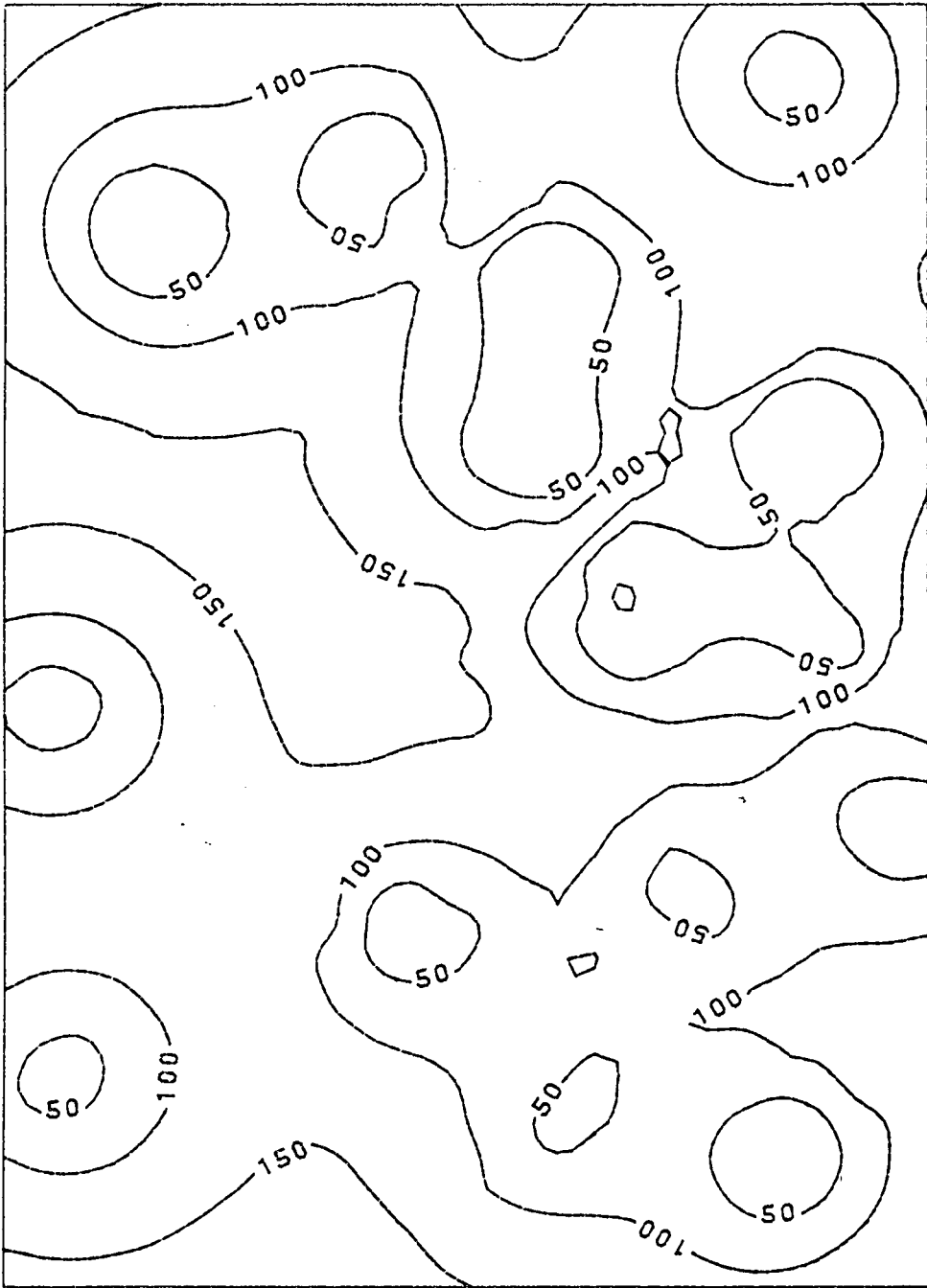
'n Vergelyking van hierdie kontoerkaarte met die verkry vanaf die volledige versameling boorgate in figure 3.3.9 en 3.6.1, toon aan dat alhoewel toevoeging van boorgate in bepaalde gebiede daartoe aanleiding gee dat gebiede met voldoende inligting beter afgebaken word, dit nie noodwendig lei tot 'n beter skatting van die T-waardes oor die gebied as geheel nie. Die mees voordelige manier om kriging in parameteridentifikasie te gebruik, skyn dus te wees om met slegs 'n klein groepie boorgate te begin en die krigingfoutkaart saam met beskikbare geologiese informasie te gebruik om die boorgate by die mees geskikte punte in die akwifereer te plaas. Hierdie resultate is skynbaar strydig met die werk van Hughes en Lettenmaier (1981). Gevolglik is daar besluit om die gedrag meer kwantitatief te ondersoek.



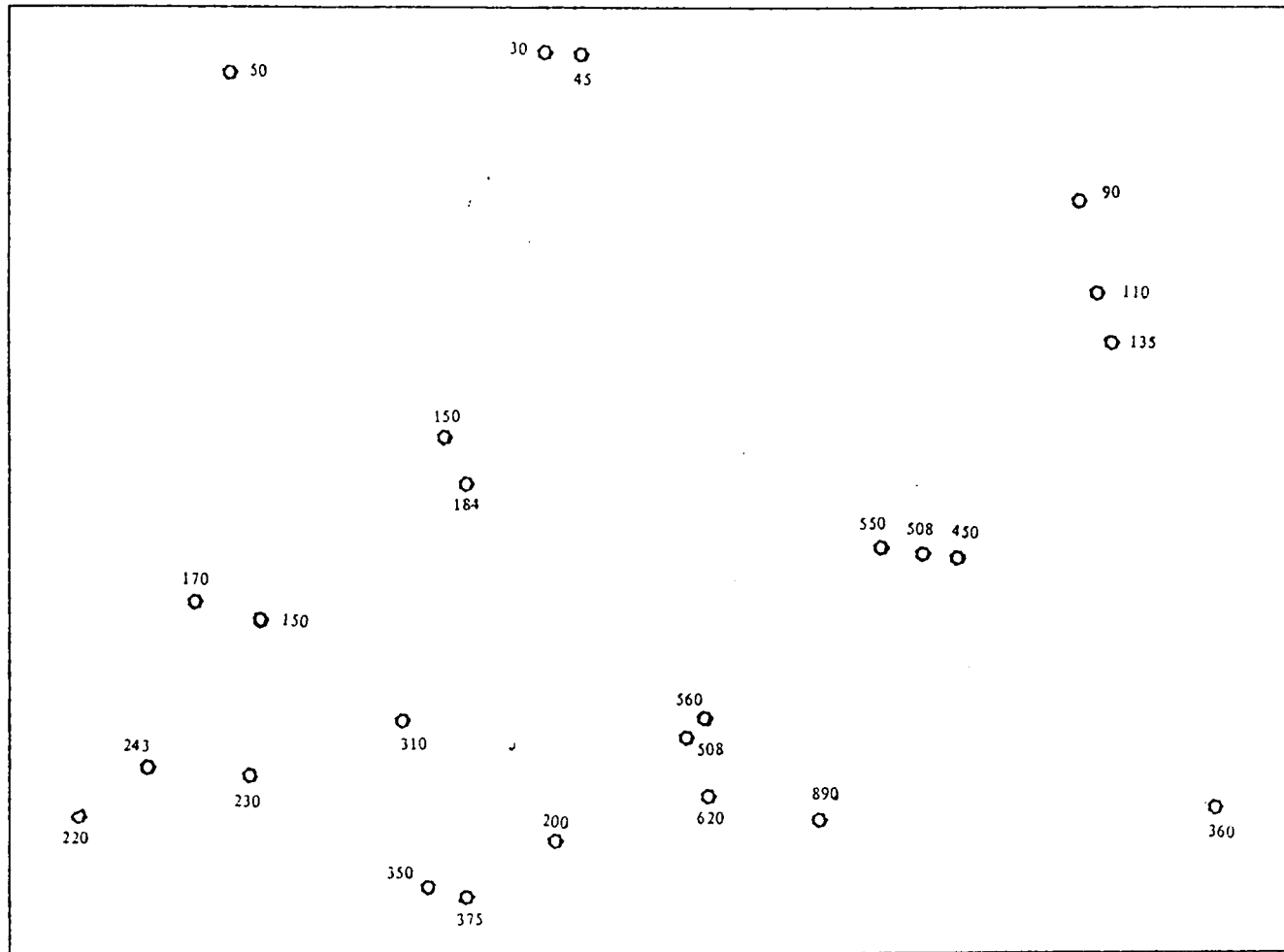
Figuur 3.6.3. Vyftien gekose boorgate uit die bestaande 70 boorgate in die Kaapse Vlakte.



Figuur 3.6.4. Transmissiwiteitskontoere van die Kaapse Vlakte soos deur gebruikmaking van die transmissiwiteite van die 15 boorgate en kriging verkry.



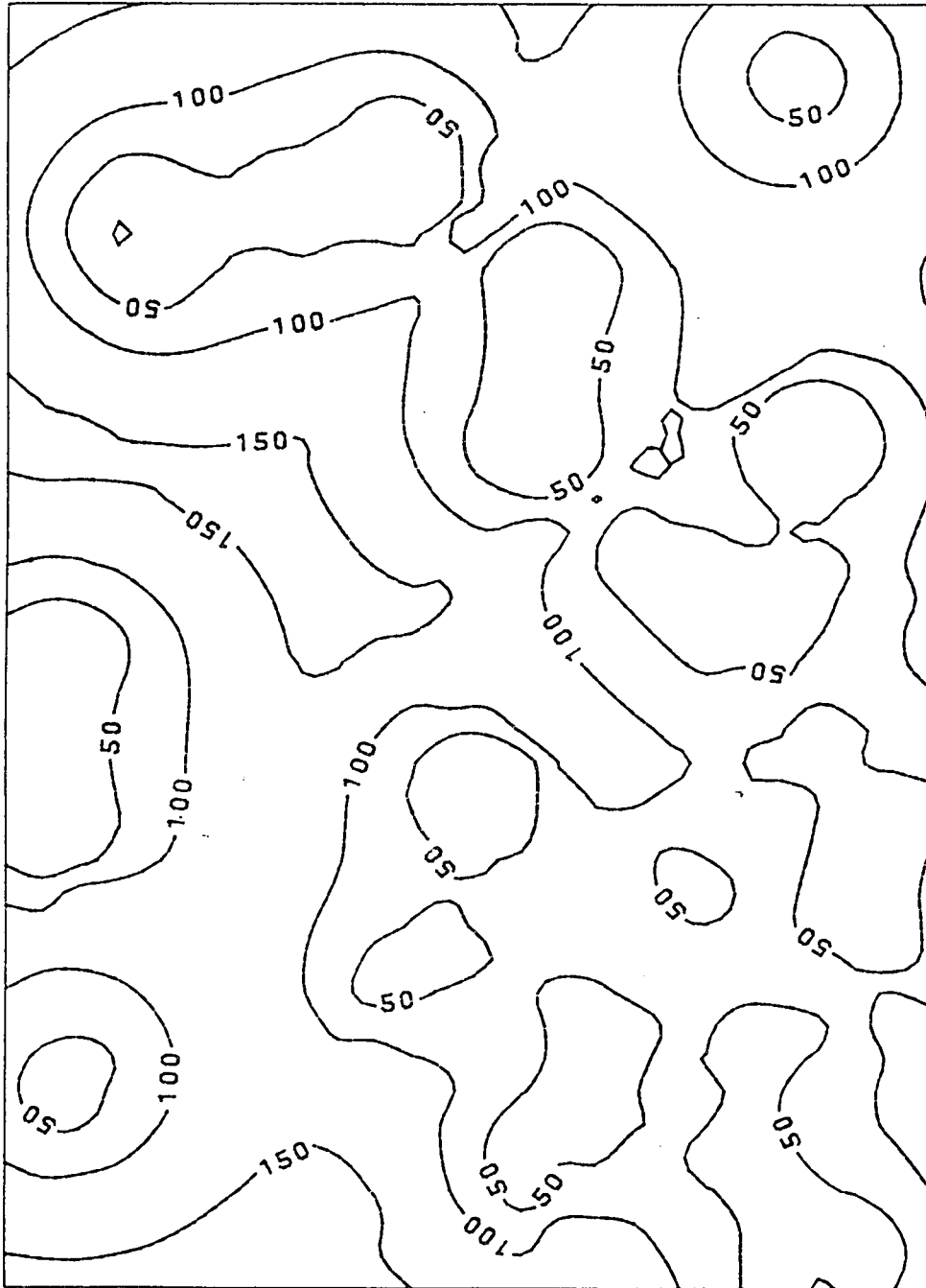
Figuur 3.6.5. Foutkaart van die geskatte transmissiwiteite in figuur 3.6.4.



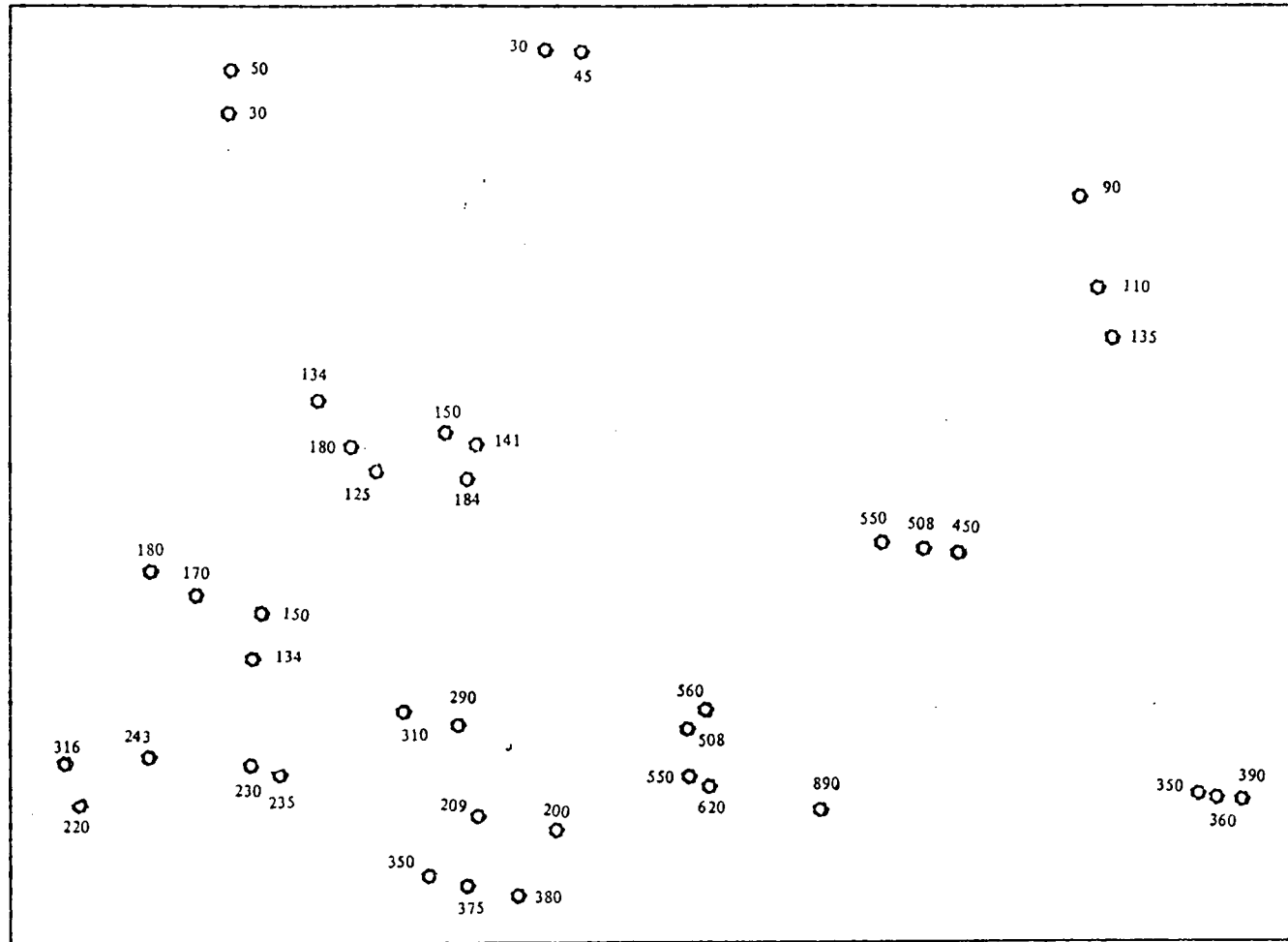
Figuur 3.6.6. Vyf-en-twintig gekose boorgate in die Kaapse Vlakte.



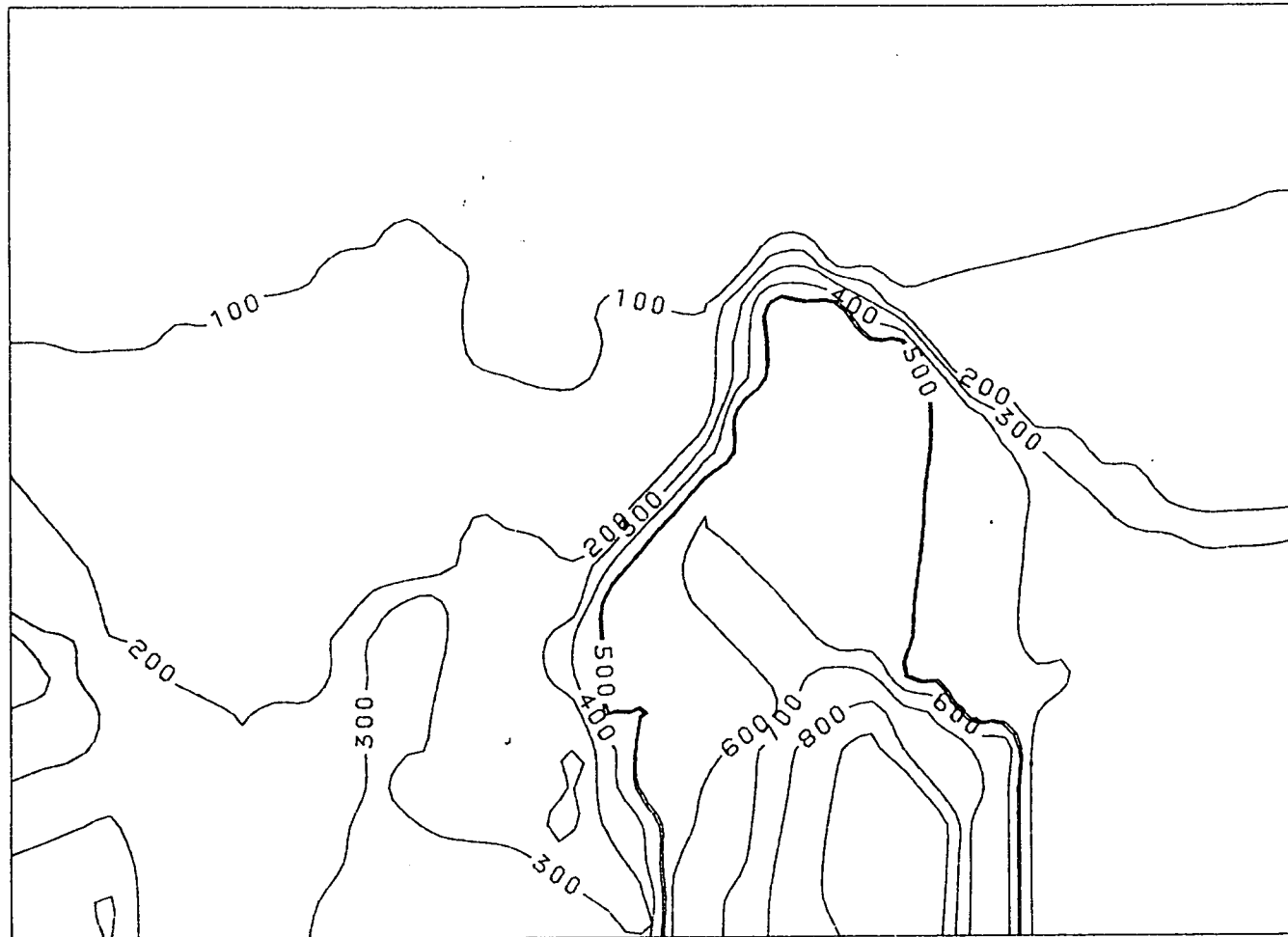
Figuur 3.6.7. Transmissiwiteitskontoure van die Kaapse Vlakte soos met behulp van kriging van die 25 gekose boorgate verkry.



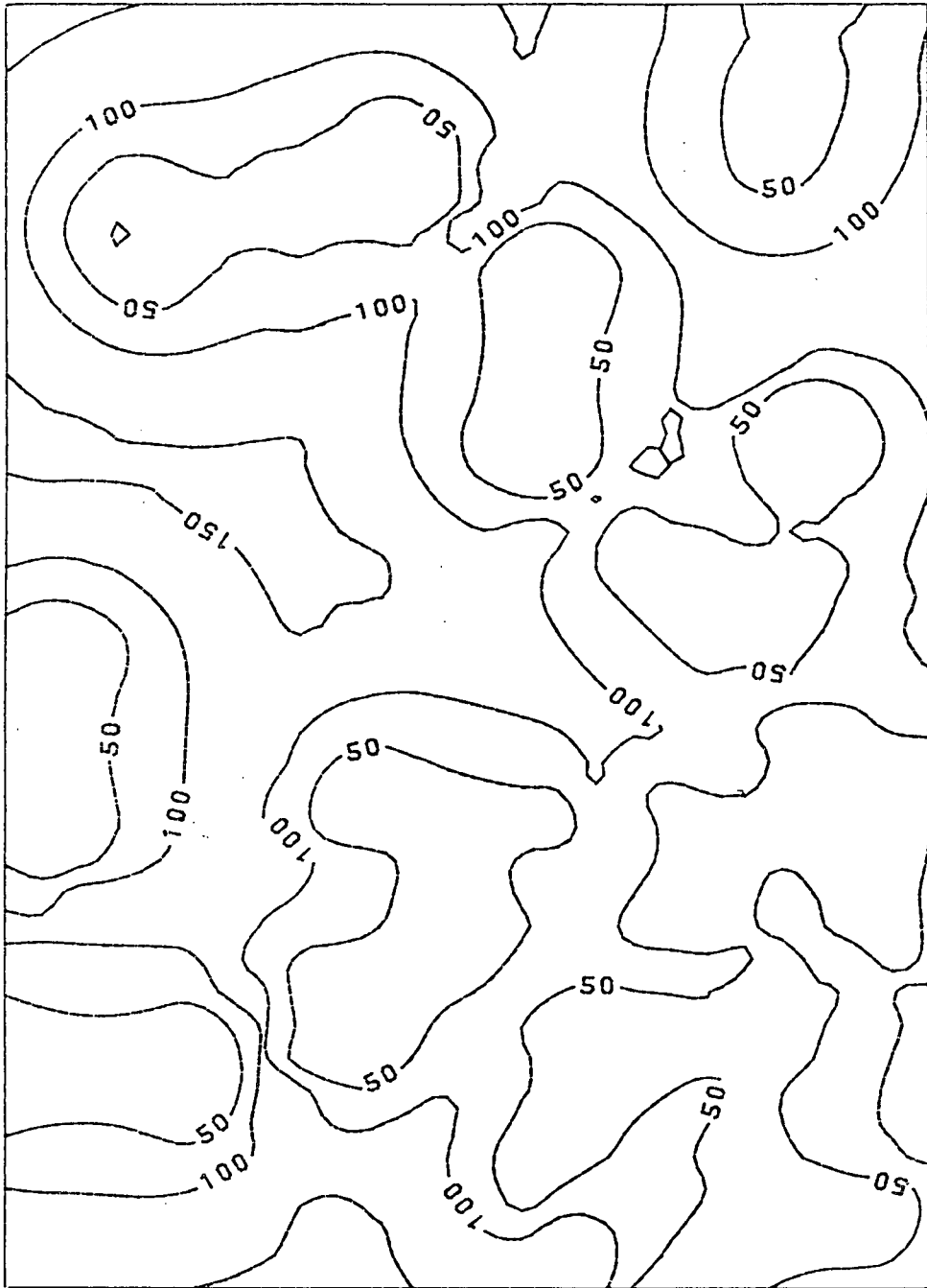
Figuur 3.6.8. Foutkaart van die geskatte transmissiwidte in figuur 3.6.7.



Figuur 3.6.9. Veertig gekose boorgate in die Kaapse Vlakte.



Figuur 3.6.10. Transmissiwiteitskontoure van die Kaapse Vlakte soos met behulp van kriging van die 40 gekose boorgate verkry.



Figuur 3.6.11. Foutkaart van die geskatte transmissiwiteite in figuur 3.6.10.

Drie willekeurige punte is vervolgens in die gebied gekies en hul T-waardes met behulp van kriging is toegepas op die data van al 70 boorgate en daarna op dié van die hierbo gekose. Hierdie skattings word in tabel 3.6.1 getoon. In die geval van die 15 gekose boorgate in tabel 3.6.1, is die 95 persent krigingstandaardafwyking ook bereken. Hierdie waardes word in hakies getoon.

TABEL 3.6.1. SKATTINGS VAN ONBEKENDE T-WAARDES MET KRIGING DEUR GEBRUIK TE MAAK VAN (i) 70, (ii) 15, (iii) 25 EN (iv) 40 BOORGATE SE T-WAARDES

X	Y	(i)	(ii)*	(iii)	(iv)
1 000	3 000	181,7	170,4 (90,0)	186,7	167,2
4 000	2 000	297,7	314,7 (49,1)	311,9	305,7
8 000	6 000	96,1	103,8 (160,1)	99,1	98,0

* Die waarde tussen hakies dui die krigingstandaardafwyking van die voorspelde waarde aan.

Hieruit is dit duidelik dat die 15 boorgate soortgelyke resultate as 70 boorgate lewer.

Dieselfde soort benadering is ook op die bergingskoeffisiënte toegepas. 'n Opsomming van die resultate word in figuur 3.6.12 en tabel 3.6.2 gegee.

TABEL 3.6.2. SKATTINGS VAN ONBEKENDE S-WAARDES MET KRIGING DEUR (i) AL DIE BOORGATE EN (ii) 15 BOORGATE TE BESKOU

X	Y	(i)	(ii)
1 000	3 000	0,162	0,170
4 000	2 000	0,343	0,356
8 000	6 000	0,140	0,157



Figuur 3.6.12. Kontoure van die bergingskoeffisiënte soos met kriging van 15 gekose boorgate verkry.

Uit hierdie resultate is dit duidelik dat kriging toegepas op 'n klein aantal boorgate, in teenstelling met die bewering van Hughes en Lettenmaier (1981), tog met sukses in die praktyk gebruik kan word. Of die verskil in resultate hier behaal en dié van Hughes en Lettenmaier toegeskryf moet word aan hul gebruik van 'n gelykverspreide rooster, is nie seker nie.

Opsommend kan daar gesê word dat die gebruik van kriging as hulpmiddel by die identifisering van parameters vir gebruik in modelleringstudies van grondwater, kostes tot 'n groot mate kan besnoei. Natuurlik sal dit nodig wees om, soos reeds gesê, die geologie van die gebied ook in aanmerking te neem.

HOOFSTUK 4

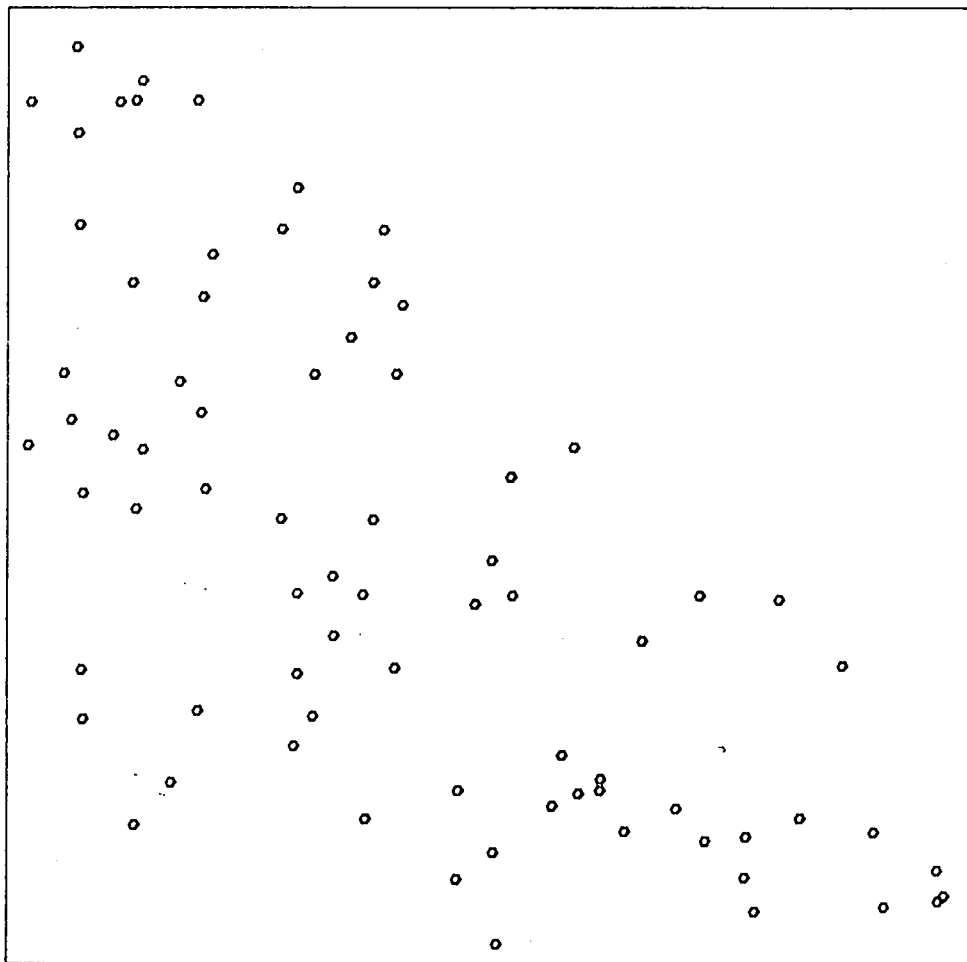
INTERPOLASIE VAN WATERVLAKKE

4.1 ALGEMEEN

Soos aangetoon in paragraaf 3.1, speel die aanvanklike watervlakposisie net so 'n belangrike rol in die modellering van 'n akwifereer as die T en S-waardes. Daarbenewens kan gegewens omtrent watervlakke ook belangrike inligting oor die algemene vloei-richting van water in 'n akwifereer verskaf (Pinder; 1981). Aangesien metings van watervlakke gewoonlik ook beperk word tot 'n klein groepie boorgate in die akwifereer, moet die watervlakke meestal geïnterpoleer word voordat dit van enige praktiese nut is.

Watervlakke hang tot 'n baie groot mate af van die topografie van 'n akwifereer. Gevolglik kan verwag word dat waargenome watervlakke altyd in 'n mindere of meerdere mate 'n drywing sal toon. Hierdie verwagting word dan ook deur die werk van Gambolati en Volpi (1979) en Skrivan en Karlinger (1980) bevestig. Die aanwesigheid van 'n drywing beteken dat watervlakdata die beste met behulp van universele kriging geïnterpoleer kan word. Verskillende benaderings wat hiervoor gebruik kan word, word in paragraaf 4.2 bespreek. In paragraaf 4.3 word 'n besondere interessante indirekte toepassing van universele kriging, soos deur Gambolati en Volpi (1979) voorgestel, bespreek. Hierdie modelle word onderling en met die AGM en tendensanalise in paragraaf 4.4 vergelyk. Daar bestaan ongelukkig nie 'n geskikte stel watervlakke vir Suid-Afrika nie. Daar moes gevolglik op die Toppenish Creek-data van Skrivan en Karlinger (1980) teruggeval word. Hierdie data bestaan uit 'n versameling van watervlakke soos in 76 boorgate versprei oor die akwifereer gemeet (kyk bylae B en figuur 4.1.1).

20 km



7

28

45 km

Figuur 4.1.1. Ligging van 76 boorgate in die Toppenish Creek-akwifereer.

4.2 UNIVERSELE KRIGING

Die teenwoordigheid van 'n drywing in die watervlakdata is duidelik waarneembaar in die eksperimentele semi-variogram van die data in figuur 4.2.1. Hierdie waardes is verkry deur die gewone kriging semi-variogram-berekening direk op die gegewe data toe te pas. Die kromme wat hierdie model die beste pas en voortaan na verwys sal word as model (a), is :

$$(a) \quad \gamma(h) = 94 h^{1,8}$$

Dit volg uit die bespreking in paragraaf 2.11 dat daar verskeie maniere bestaan waarop universele kriging toegepas kan word. Hier sal die volgende drie maniere ondersoek word.

(i) *Die iteratiewe bepaling van die residu semi-variogram*

Hierdie benadering, bespreek in paragraaf 2.11, kom daarop neer dat die drywing met 'n geskikte versameling van basisfunksies benader word. Die koëffisiënte in die benadering word dan iteratief gevarieer totdat 'n beste KGF en KSS vir 'n gekose vorm van die semi-variogram verkry is.

In hierdie ondersoek is daar van twee sulke stelle basisfunksies gebruik gemaak, naamlik die lineêre polinome

$$1, x, y \quad (\text{model (b)})$$

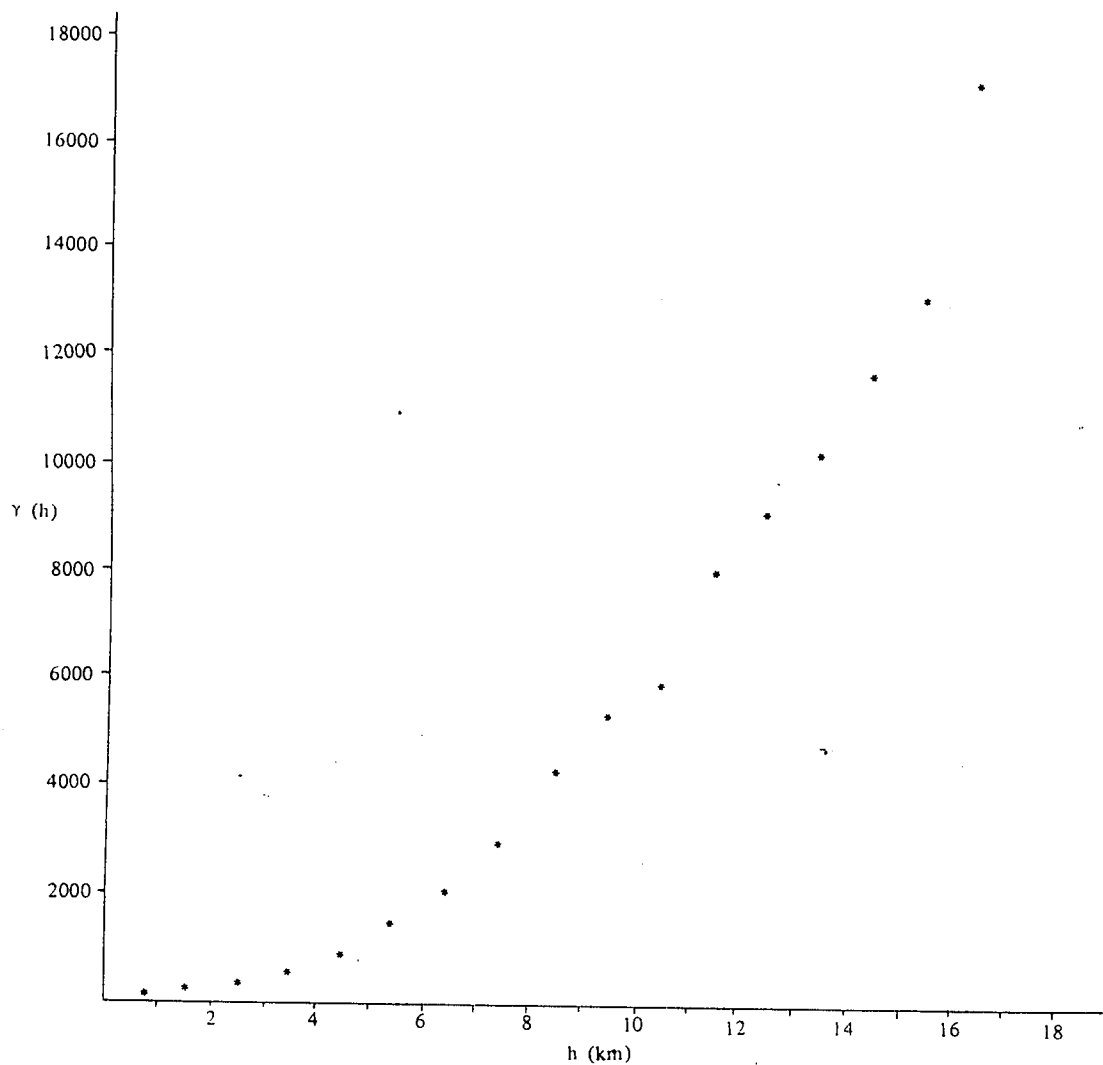
en die trigonometriese funksies

$$1, \sin(\pi x/L_x), \sin(\pi y/L_y) \quad (\text{model (c)})$$

waar L_x en L_y konstantes is wat verteenwoordigend is van die lengtes van die gebied wat ondersoek word in die x- en y-rigtings respektiewelik. Die twee modelle, (b) en (c), het albei dieselfde semi-variogram

$$\gamma(h) = 25 h^{1,8}$$

gelewer.



Figuur 4.2.1. Eksperimentele semi-variogram van die watervlakke in die

Toppenish Creek-akwifereer.

- (ii) *Fletcher se boetefunksie-metode (kyk paragraaf 2.11) toegepas op 'n intrinsieke funksie van orde 1*

Hierdie model kan wiskundig deur die veralgemeende kovarians voorgestel word :

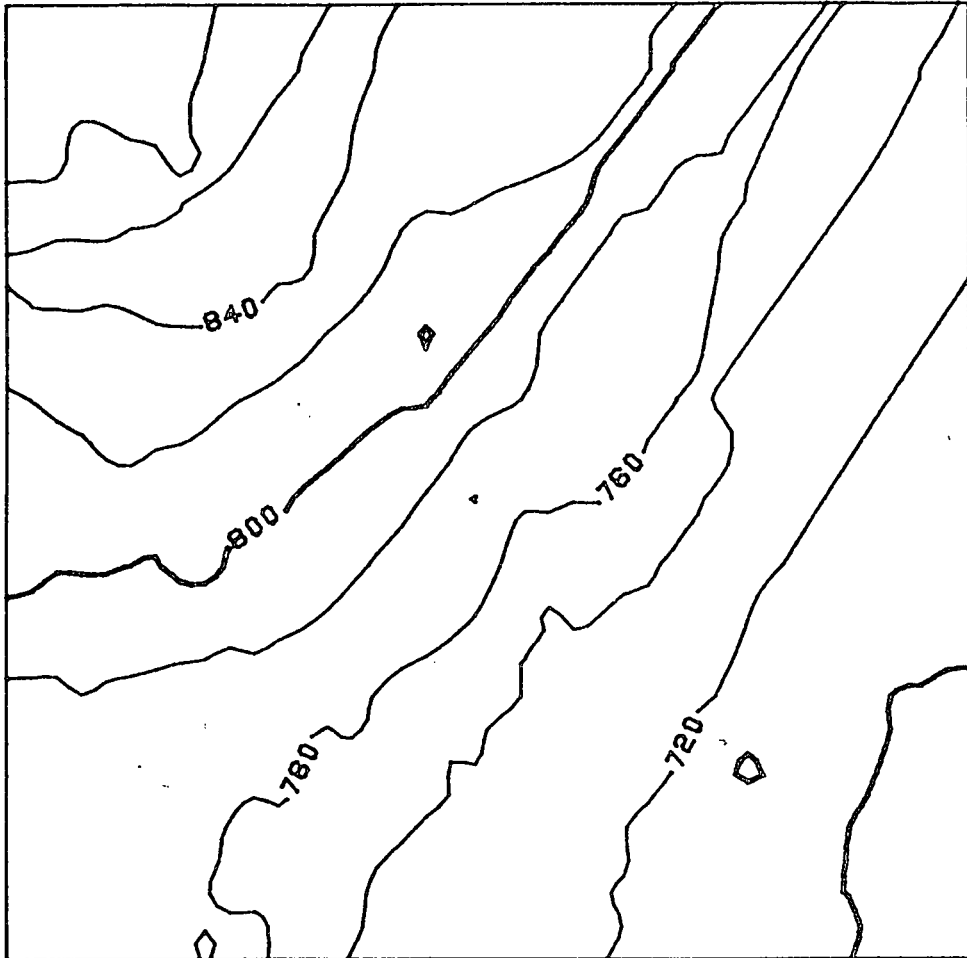
$$(d) \quad K(h) = 32,11 - 9,01 h - 0,03 h^3$$

- (iii) *Die opbreek van die universele krigingmatriks (kyk paragraaf 2.11, vergelyking (2.11.9))*

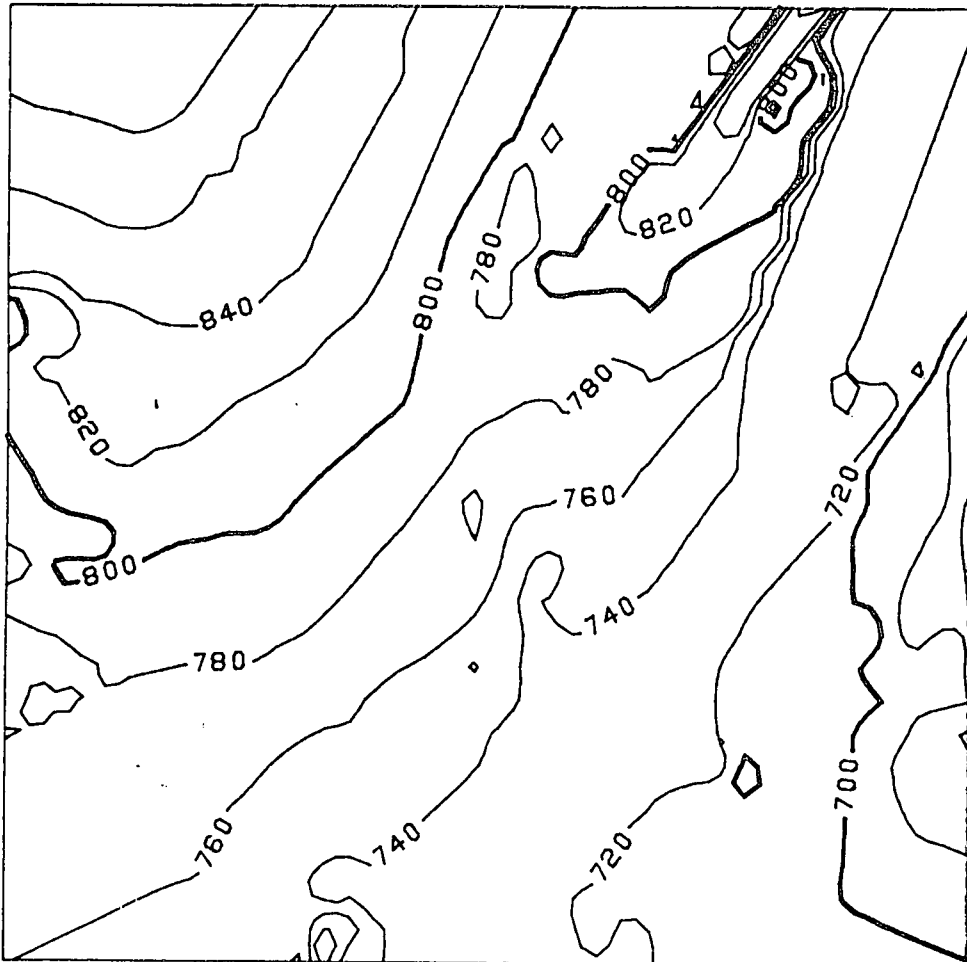
Die basisfunksies in die benadering gebruik, is die trigonometriese funksies soos in (i) hierbo. In hierdie geval kan daar geen semi-variogram of foutkaart (en dus ook geen KSS) bepaal word nie. Na hierdie benadering sal voortaan as model (e) verwys word.

Hoe doeltreffend die verskillende modelle in die interpolasie van die gegewe watervlakke is, kan miskien die beste geoordeel word na 'n vergelyking van die verskillende watervlakkontoere in figure 4.2.2 - 4.2.6.

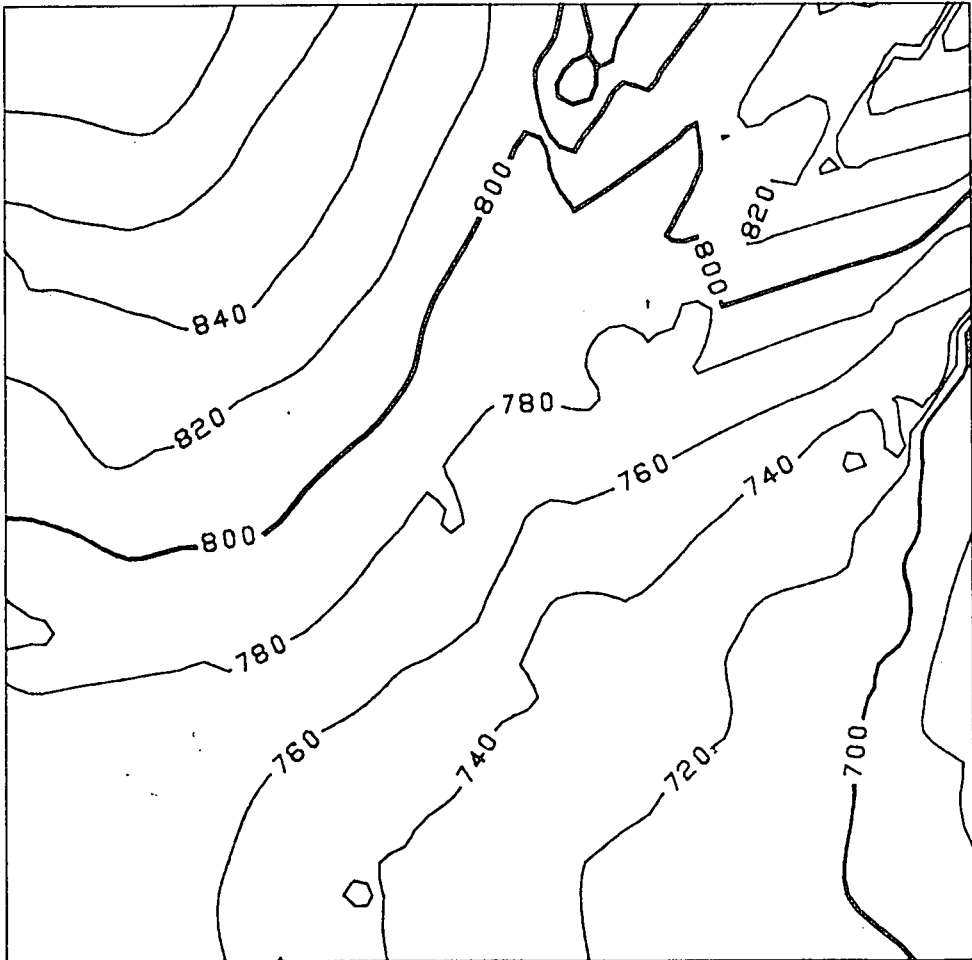
Met die eerste oogopslag is daar nie groot verskille waarneembaar in die verskillende kaarte nie, behalwe vir die gedeelte in die boonste regterkantste hoek. Dit geld veral vir die kontoere verkry met behulp van modelle (b) en (d). Dit moet egter in gedagte gehou word dat beide modelle op 'n drywing van die vorm $m(x) = ax + by + c$ gebaseer is. Daar moet dus nie sonder meer aanvaar word dat hierdie modelle die geskikste vir die gegewe data is nie. Inderwaarheid, as aanvaar word dat die KGF en KSS-waardes goeie beramers is, toon tabel 4.4.1 aan dat model (c), gebaseer op die trigonometriese basisfunksies, die geskikste model vir die data is. Dit is interessant om te let op die ooreenkoms van die kontoerkaarte van model (e), waarvoor geen semi-variogram bepaal hoef te word nie, en model (c) (kyk figure 4.2.4 en 4.2.6).



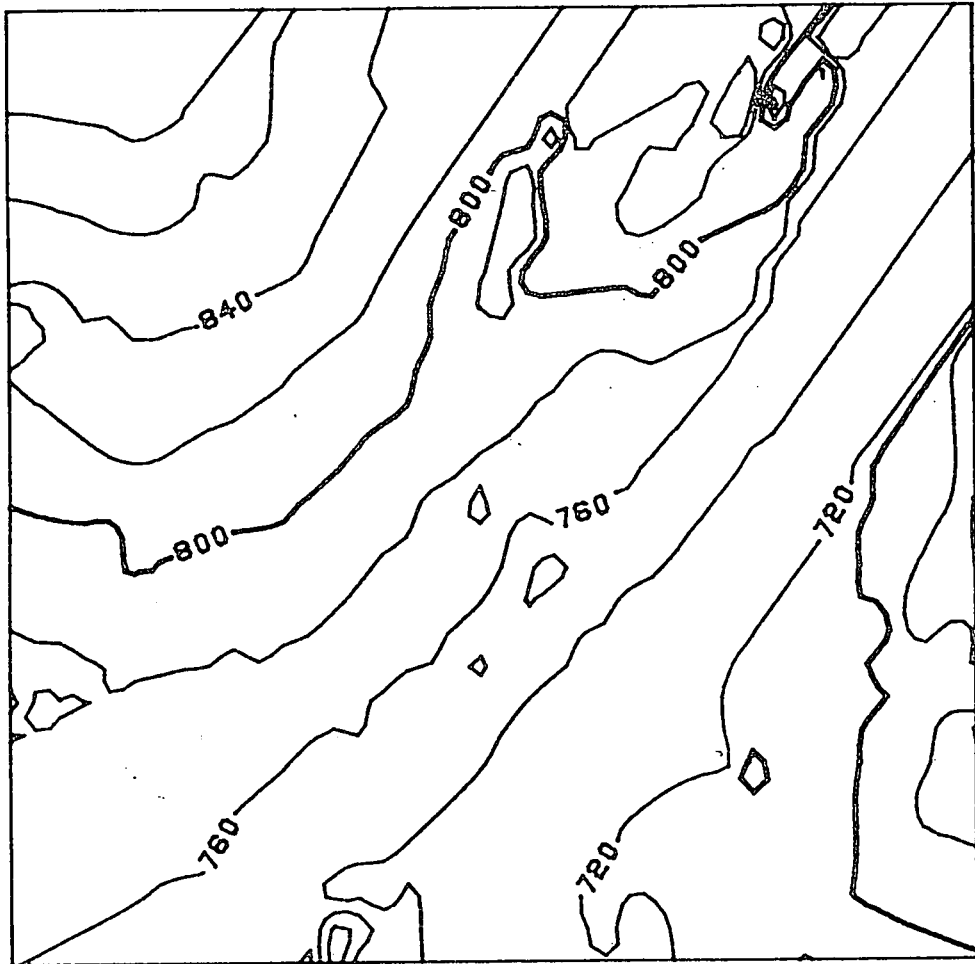
Figuur 4.2.2. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van gewone kriging en die model $\gamma(h) = 94 h^{1,8}$ (model (a)) verkry.



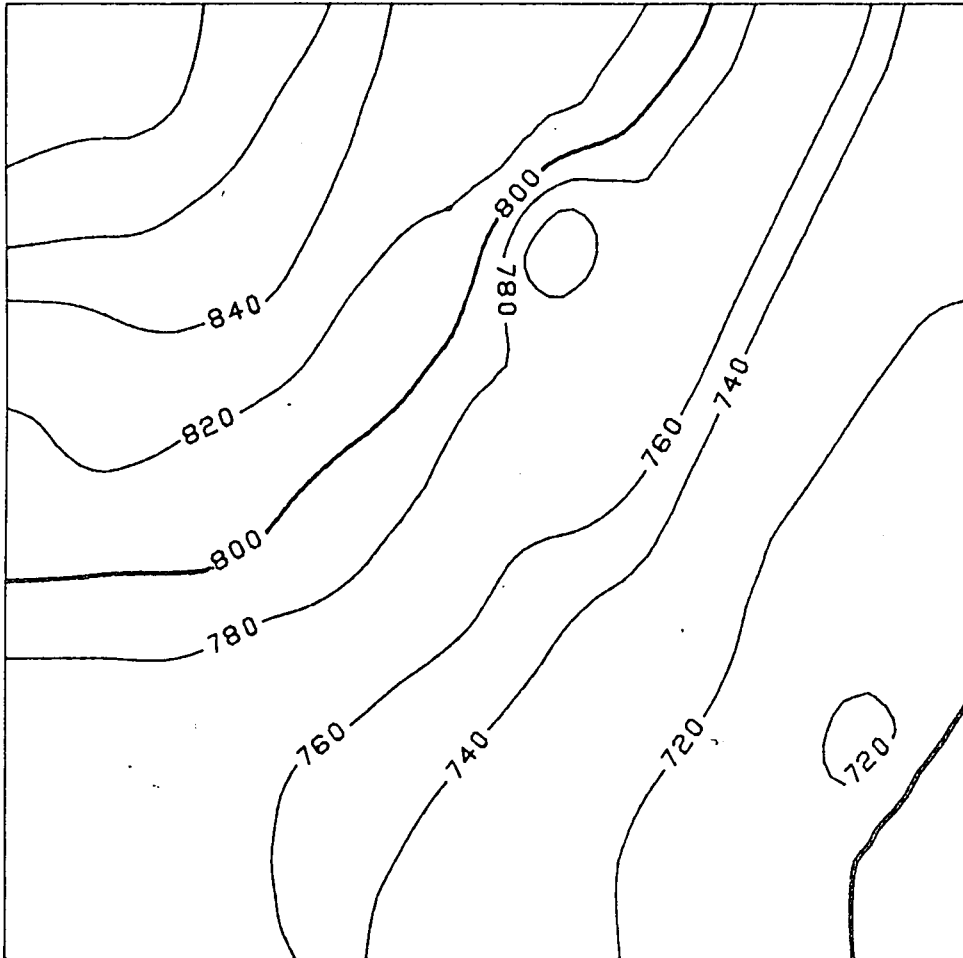
Figuur 4.2.3. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer soos met behulp van universele kriging en die basisfunksies 1, x, y (model (b)) verkry.



Figuur 4.2.4. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifer soos met behulp van universele kriging en die trigonometriese basisfunksies (model (c)) verkry.



Figuur 4.2.5. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifereer met intrinsieke funksies van orde 1 (model (d)).



Figuur 4.2.6. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifer soos met die opbreke van die universele krigingmatriks (model (e)) verkry.

4.3 DIE MODEL VAN GAMBOLATI EN VOLPI (GVM)

'n Besondere interessante toepassing is die indirekte gebruik van universele kriging op die Venesiese akwifereer in Italië deur Gambolati en Volpi (1979). Hulle gaan van die standpunt uit dat die drywing $m(x)$ nie willekeurig gekies moet word nie, maar op die fisiese gedrag van die watervlakke gebaseer behoort te wees. Vir die Venesiese akwifereer met sy groot ontwateringskeël het hul gevind dat die drywing van die vorm

$$m(x,y) = A \ln \frac{Bx^2 + Cxy + (y-d)^2}{Bx^2 + Cxy + (y+d)^2} + z_0 \quad (4.3.1)$$

is. In hierdie vergelyking is d 'n geometriese parameter (= afstand tussen die akwifereergrens en die keël van ontwatering); A , B en C konstantes en z_0 'n voorgeskrewe drukhoof, deur hul gekies as die hoogste watervlak.

Aangesien beide d en z_0 uit die waarnemings afgelei kan word, is dit slegs nodig om die koëffisiënte A , B en C op een of ander manier, soos nie-lineêre kleinste kwadrate, te bepaal. Die Toppenish Creek data wat in die bespreking gebruik word, toon ongelukkig nie dieselfde diep ontwateringskeël as data van Gambolati en Volpi nie. Dit is dan ook gevind dat, in ooreenstemming met die resultate van paragraaf 4.2, die drywing

$$m(x) = 838 - 5,5x + 10,9y \quad (4.3.2)$$

die gegewe data beter pas as 'n GVM-benadering gebaseer op (4.3.1) waarin al die koëffisiënte met die MKK bepaal word.

Die besondere voordeel van die GVM is daarin geleë dat, met die drywing bekend, gewone kriging op die residu toegepas kan word

$$z_i = Z_i - m(x_i, y_i)$$

'n Berekening wat heelwat eenvoudiger is as die toepassing van universele kriging op die gegewe data Z_i .

Vir die Toppenish Creek-data lewer die GVM met drywing gegee deur (4.3.2) die residu semi-variogram (model (f))

$$\gamma(h) = 94h$$

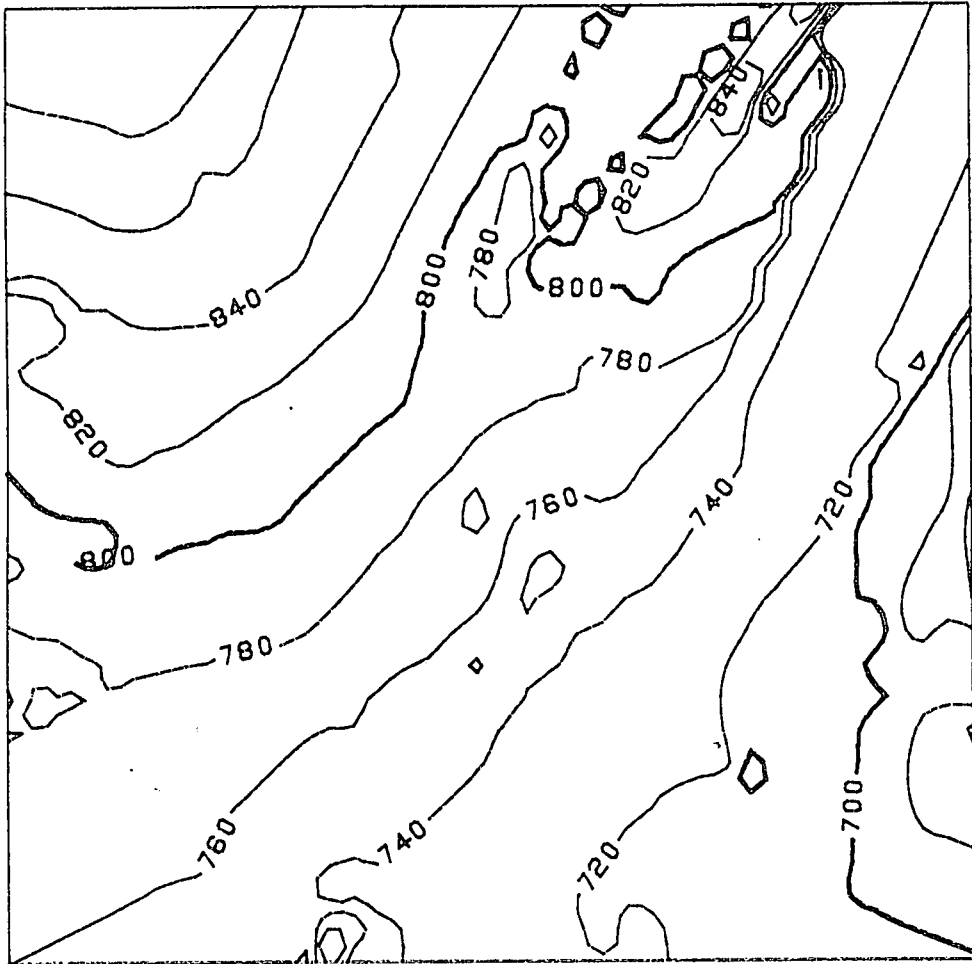
Die kontoerkaart gebaseer op hierdie model, word in figuur 4.3.1 getoon en toon 'n goeie ooreenstemming met dié verkry met behulp van die universele modelle (b) en (c). Dit wil dus voorkom asof die bewering van Gambolati en Volpi dat 'n lineêre residu semi-variogram net so goed as enige ander semi-variogram is, meer deeglik ondersoek behoort te word. Vir dié doel sal dit egter nodig wees om van meer stelle watervlakke gebruik te maak as wat tans beskikbaar is.

4.4 VERGELYKING TUSSEN DIE VERSKILLENDE MODELLE EN DIÉ GEBASEER OP DIE AGM EN TENDENSANALISE

Ten einde hierdie bespreking af te rond, word die KGF en KSS-waardes van die verskillende modelle, bespreek in paragrawe 4.2 en 4.3, in tabel 4.4.1 saamgevat.

TABEL 4.4.1. DIE TOETSSTATISTIEKE (KGF EN KSS) VAN DIE MODELLE SOOS BESPREEK IN PARAGRAWE 4.2 EN 4.3

	MODEL					
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)
KGF	0,51	0,21	-0,05	0,45	0,20	0,33
KSS	0,81	1,1	0,88	1,1	-	1,3



Figuur 4.3.1. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifer soos

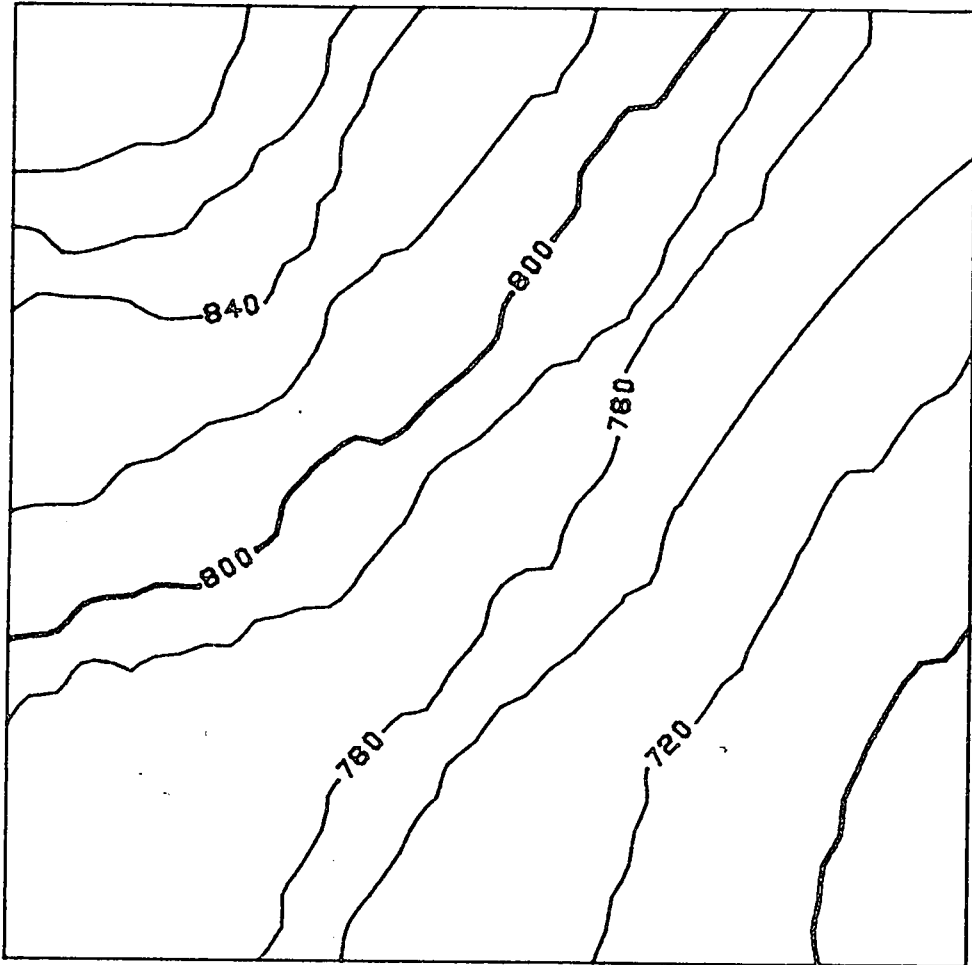
met die Gambolati- en Volpi-model (model (f)) verkry.

Uit hierdie waardes wil dit voorkom asof modelle (b), (c), (d) en (f) omtrent ewe geskik is, met model (c) miskien die akkuraatste. Hierdie resultaat word ook bevestig deur die verskille tussen die waargenome en voorspelde watervlakke getoon in tabel 4.4.2. (Soos voorheen is laasgenoemde waardes verkry deur die betrokke waarde uit die versameling weg te laat).

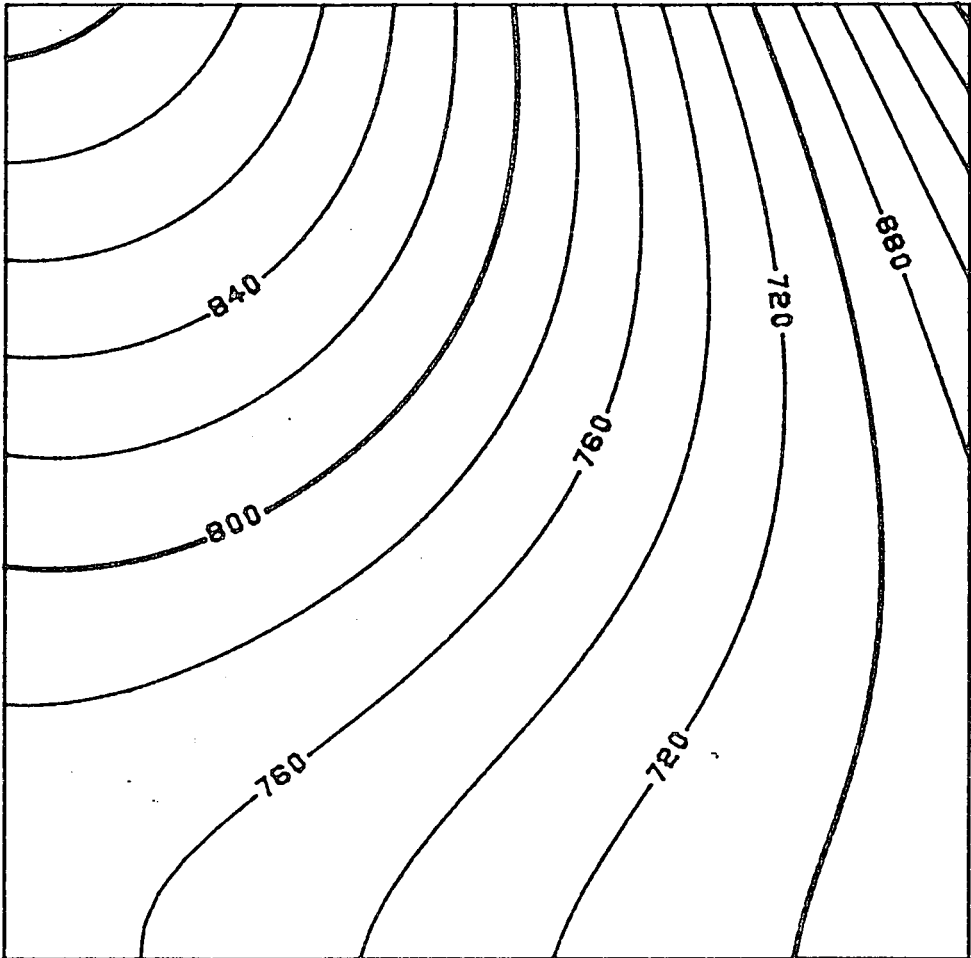
TABEL 4.4.2. VERSKIL TUSSEN DIE WAARGENOME EN DIE VOORSPELDE WATERVLAKKE VIR MODELLE (a) - (f) EN DIE AGM EN TENDENSANALISE

Watervlak	MODEL							
	(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	AGM	Tendens
782	-1,8	-0,4	-0,07	-0,5	-2,0	-0,29	-1,7	0,9
784	-0,9	-0,2	-0,9	-0,3	-1,9	-0,28	-4,2	2,5
756	3,4	2,1	2,1	3,0	3,6	2,41	6,3	-2,8
730	0,8	2,3	1,1	2,5	2,9	-0,08	-1,4	-0,5
694	-0,3	-0,1	-0,2	0,2	-0,8	-0,37	0,9	-1,3
835	-11,2	-11,1	-9,0	-11,1	-4,6	-10,9	-14,2	8,1
783	0,6	0,6	0,5	0,9	-0,8	3,32	-2,5	-2,4

Vir vergelykingsdoeleindes word hier ook waardes aangegee soos verkry met die AGM en tendensanalise van graad 2. Die afwykings vir die AGM is beslis die grootste in tabel 4.4.2. Hierdie resultaat, tesame met die feit dat sy kontoerkaart in figuur 4.4.1 'n groter ooreenkoms vertoon met dié van die gewone kriging in figuur 4.2.2, dui daarop dat die AGM nie 'n geskikte metode vir die interpolasie van watervlakke is nie. Uit tabel 4.4.2 wil dit voorkom asof tendensanalise die watervlakke redelik goed behoort te voorspel, maar as na figuur 4.4.2 gekyk word, word gesien dat die kontoerkaart nie met dié van die universele krigingmodelle ooreenkom nie.



Figuur 4.4.1. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifer soos met behulp van die AGM verkry.



*Figuur 4.4.2. Watervlakkontoere van die Toppenish Creek-akwifer
soos met behulp van tendensanalise verkry.*

Opsommend kan gesê word dat universele kriging met sukses by die interpolasie van watervlakke toegepas kan word. Die geskikste model vir so 'n toepassing van universele kriging is egter 'n probleem van 'n ander aard. Al wat hier aanbeveel kan word, is om eerstens die voorstel van Gambolati en Volpi te probeer toepas. Anders mag dit miskien gerade wees om verskeie modelle te probeer en teen mekaar op te weeg, voordat 'n sekere model as die beste aanvaar word. Verskeie sulke modelle wat goeie resultate lewer, kan gewoonlik gevind word. Indien meer as een model aanvaarbaar skyn te wees, mag dit miskien nodig wees om die raad van 'n geohidroloog, wat goed vertrouwd met die spesifieke akwifereer is, in te win.

HOOFSTUK 5

INTERPOLASIE VAN HIDROGEOCHEMIESE PARAMETERS

5.1 ALGEMEEN

Grondwater ondergaan vanaf sy aanvulling (byvoorbeeld reën), totdat dit weer vrygestel word (byvoorbeeld uitpomp), sekere chemiese veranderinge. Van die faktore wat hier 'n rol speel, is gesteentetipe, beweeglikheid, druk en temperatuur. Die studie van die samestelling van grondwater op verskeie punte in 'n gebied kan ook inligting omtrent die bron verskaf. So byvoorbeeld (Chebotarev; 1955 en Schoeller; 1959) :

- (i) Die bikarbonaat (HCO_3) hoog in die gebiede van aanvulling en laag in gebiede van onttrekking is.
- (ii) Die totale opgeloste stowwe (T.O.S.) gewoonlik vermeerder in die rigting waarin die grondwater vloei.
- (iii) Die sulfaat (SO_4) tot chloried (Cl) verhouding neem af in die rigting van vloei.
- (iv) Die verhouding van chloried tot bikarbonaat neem toe met die ouderdom van die grondwater.

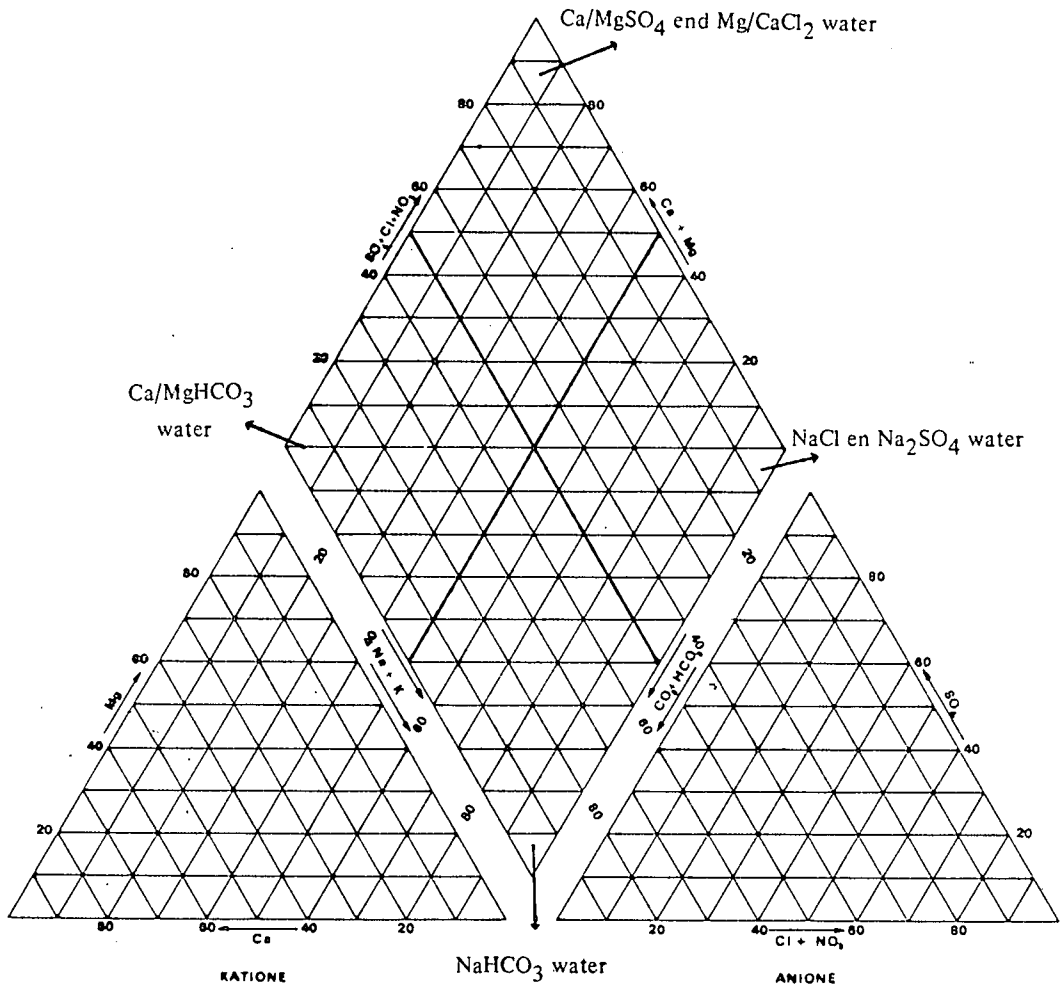
Hierdie gedrag van grondwater kan volgens Johnson (1974) soos volg verklaar word. Die CO_2 in reënwater reageer met die gesteentes in die boonste lae van die grond en vorm hoofsaaklik CaHCO_3 en MgHCO_3 . Net na aanvulling bevat die grondwater dus 'n relatiewe hoë konsentrasie van Ca/MgHCO_3 . Soos die grondwater deur die sisteem beweeg, word kalsium en magnesium aan kleideeltjies geadsorbeer, terwyl natrium uit die gesteentes

vrygestel word. Sodoende verkry die water 'n NaHCO_3 karakter. Solank die vloeitempo konstant is, bly die grondwater hierdie NaHCO_3 karakter behou. Sodra die vloeitempo afneem, kan CaCO_3 presipiteer met 'n gelyktydige vrystelling van Cl uit die gesteentes. Die gevolg is dat die konsentrasie van NaCl in die water verhoog.

In 'n water met 'n lae vloeiensnelheid, word weer gevind dat die uitruiling van Ca/Mg ione met Na ione veel stadiger geskied as die verplasing van HCO_3/CO_3 met Cl/ SO_4 uit die gesteentes. Die water verkry dan hoofsaaklik 'n Ca/Mg SO_4 en Mg/CaCl $_2$ karakter. Indien die vloeitempo verder afneem, skep dit geleentheid vir die sulfaat om te presipiteer en die water verkry 'n Ca/MgCl $_2$ karakter. Mettertyd sal die Ca/Mg egter ook deur Na verplaas word en verkry die water dus ook 'n NaCl karakter.

Opsommend kan gesê word dat jong water 'n Ca/Mg HCO_3 karakter het, 'n dinamiese sisteem 'n NaHCO_3 karakter, 'n stagnante sisteem 'n Ca/MgCl $_2$ en Ca/Mg SO_4 karakter en 'n ou water 'n NaCl karakter het. Daar bestaan verskeie maniere waarop die hidrochemiese elemente, teenwoordig in grondwater, aangestip kan word. Van die bekendste van hierdie maniere is waarskynlik die welbekende Piperdiagram (kyk figuur-5.1.1). In hierdie diagram word die katione Ca, Mg, Na en K en die anione HCO_3 , CO_3 , SO_4 , Cl en NO_3 gebruik om die grondwater in 'n sekere klas te groepeer. 'n Metode wat dieselfde resultate lewer maar nie al bogenoemde katione en anione benodig nie, is gebaseer op die bekende statistiese metode van faktoranalise (Van Tonder; 1979). Hier word die chemiese elemente statisties saamgevoeg om 'n sogenaamde 'faktor', byvoorbeeld NaHCO_3 , te lewer. Aangesien monsters van grondwater weer eens slegs in beskikbare boorgate geneem kan word, spreek dit vanself dat hierdie metodes slegs toegepas kan word in gebiede waar daar geen boorgate teenwoordig is nie, deur gebruik te maak van interpolasie-tegnieke.

Met die oog op so 'n toepassing is daar besluit om die metode van kriging op die hidrogeochemie van die Vryburgkompartement toe te pas. Na 'n bespreking van die hidrochemie van die kompartement in paragraaf 5.2,



Figuur 5.1.1. Piperdiagram vir die voorstelling van die chemiese elemente teenwoordig in grondwater.

sal paragraaf 5.3 aan 'n bespreking van die moontlike toepassing van kriging op die data gewy word.

5.2 DIE HIDROGEOCHEMIE VAN DIE VRYBURGKOMPARTEMENT

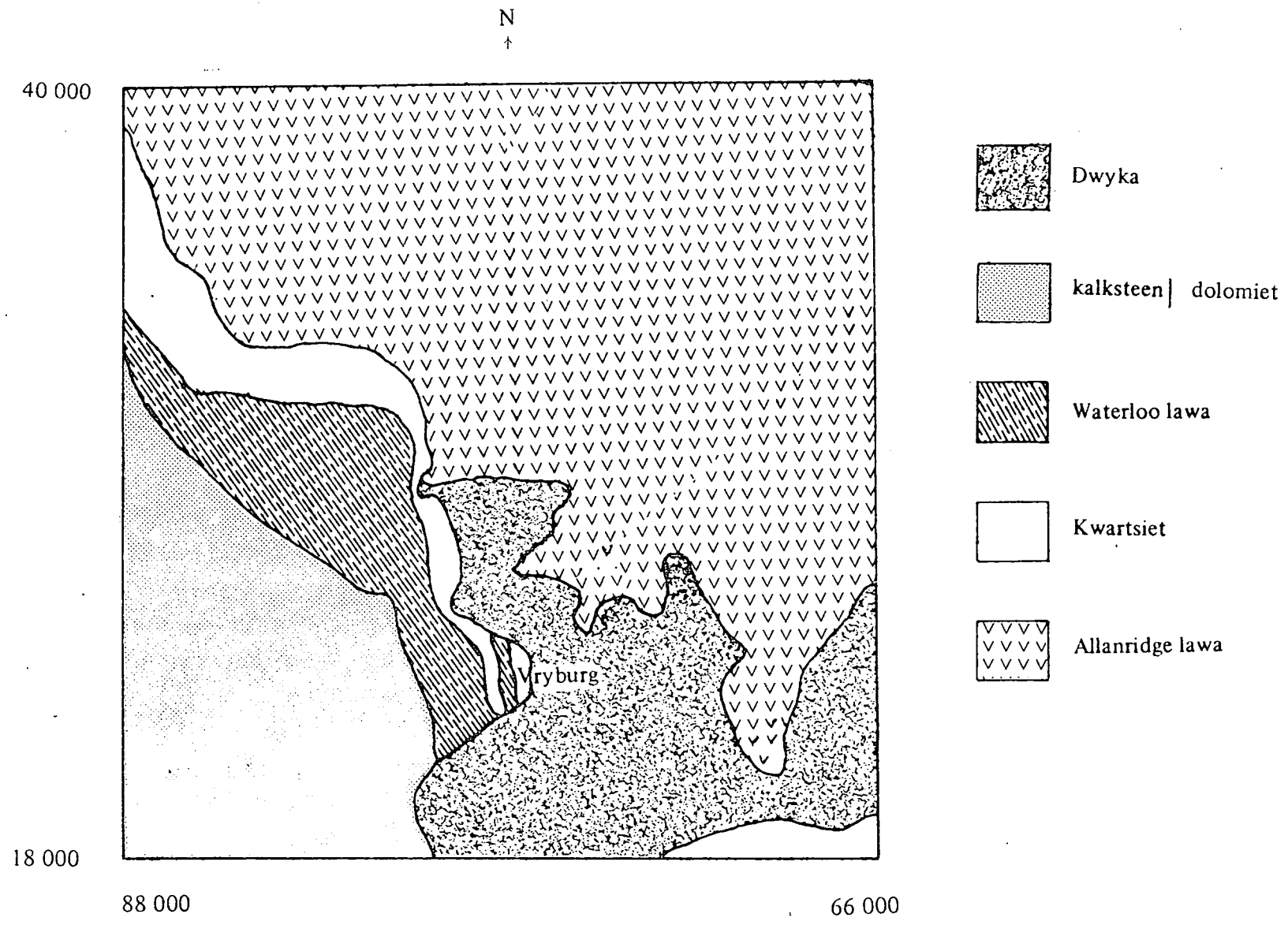
Die geohidrologie van die Vryburgkompartement is deur Van der Westhuizen (1981) ondersoek. Basies bestaan die gesteentes uit Allanridge-lawa, Vryburgkwartsiet, kalksteen, dolomiet en sedimente van Dwyka (kyk figuur 5.2.1). Chemiese analises is op die grondwater van 91 boorgate, waarvan die posisies in figuur 5.2.2 getoon word, uitgevoer. Hierdie data word in bylae C weergegee.

'n Faktoranalise wat op die data uitgevoer is (kyk figuur 5.2.3), toon aan dat daar basies drie grondwatertipes in die sisteem voorkom, naamlik 'n Ca/MgHCO₃ water in die kwartsiet en kalksteen, 'n NaCl water in die Allanridge-lawa en 'n Ca/MgCl₂ water in die Dwyka. Hierdie gedrag kan aan die ouderdom en die gesteentes waarin die grondwater voorkom, toegeskryf word.

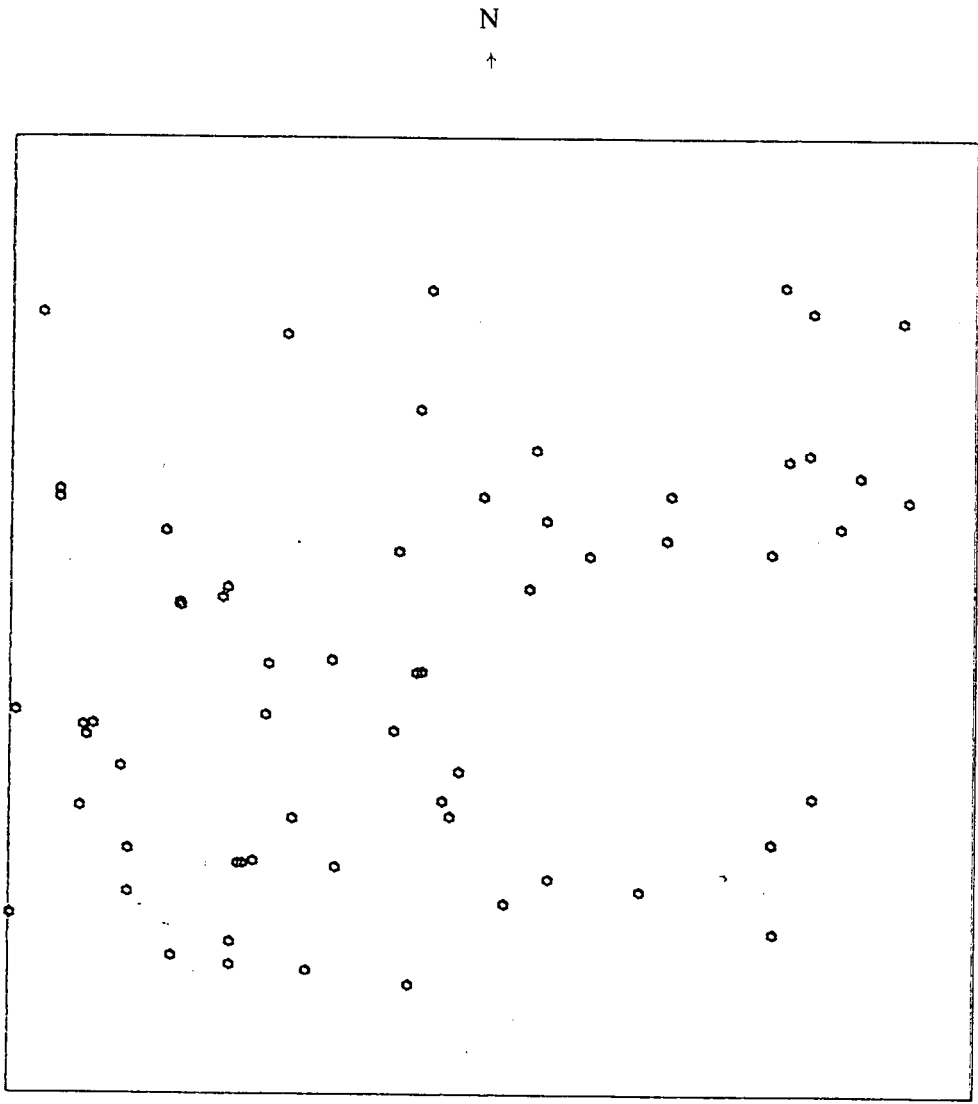
Die Vryburgkwartsiet is 'n goeie waterdraer en sterk boorgate is in hierdie gebied bekend (Van der Westhuizen; 1981). Dit, tesame met die lae Cl en SO₄ inhoud van hierdie waters, dui daarop dat goeie aanvulling moontlik deur nate in die kwartsiet geskied. Die Allanridge-lawa se grondwater is weer ryk aan Na, Cl en SO₄ wat op 'n relatiewe ou water met min beweging dui. Hierdie afleiding word gestaaf deur die feit dat sterk boorgate in die lawa slegs voorkom waar 'n naatstruktuur raakgeboor word.

5.3 KRIGING VAN DIE HIDROCHEMIESE DATA

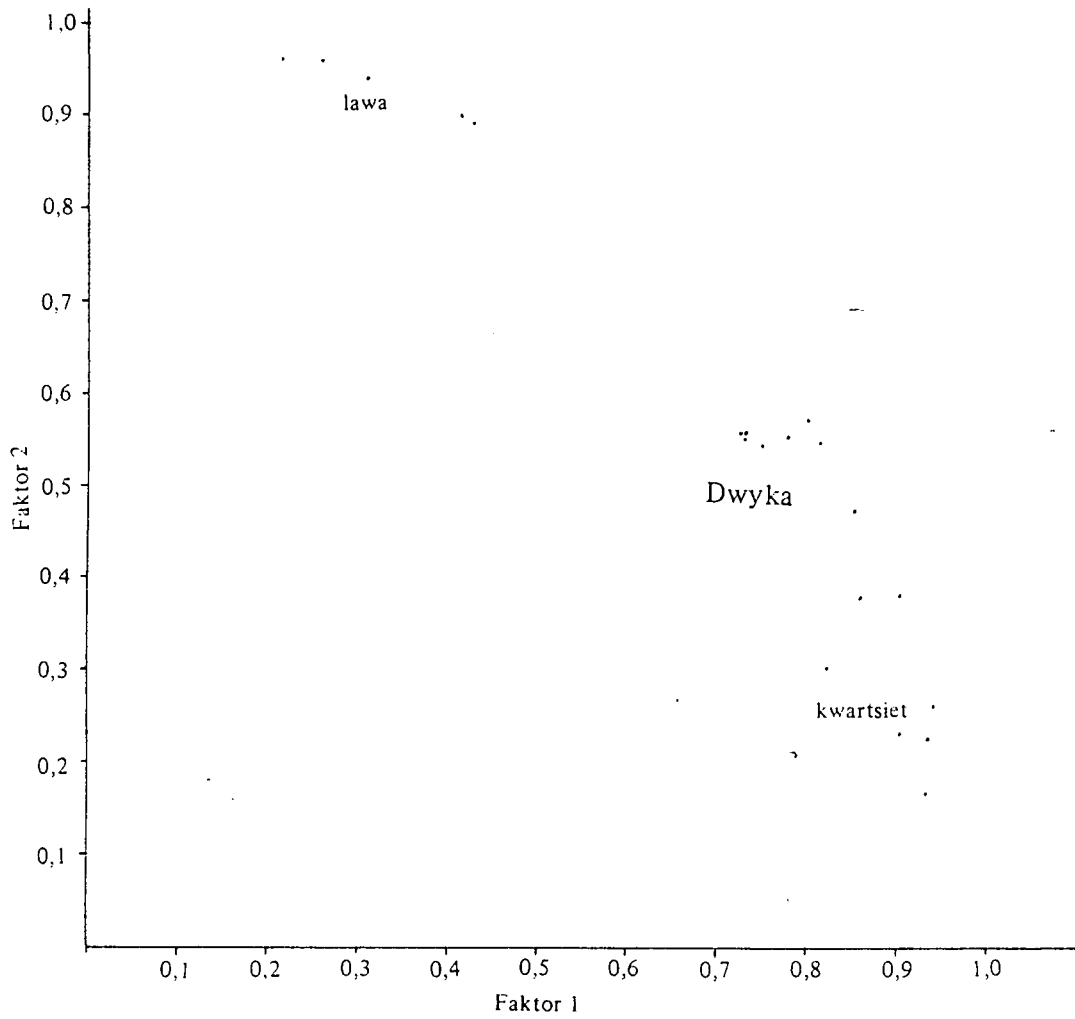
Die eksperimentele semi-variogramme van Ca, Na, HCO₃, Cl en SO₄ is gereken en word saam met die beste passingsmodelle in figure 5.3.1 - 5.3.5



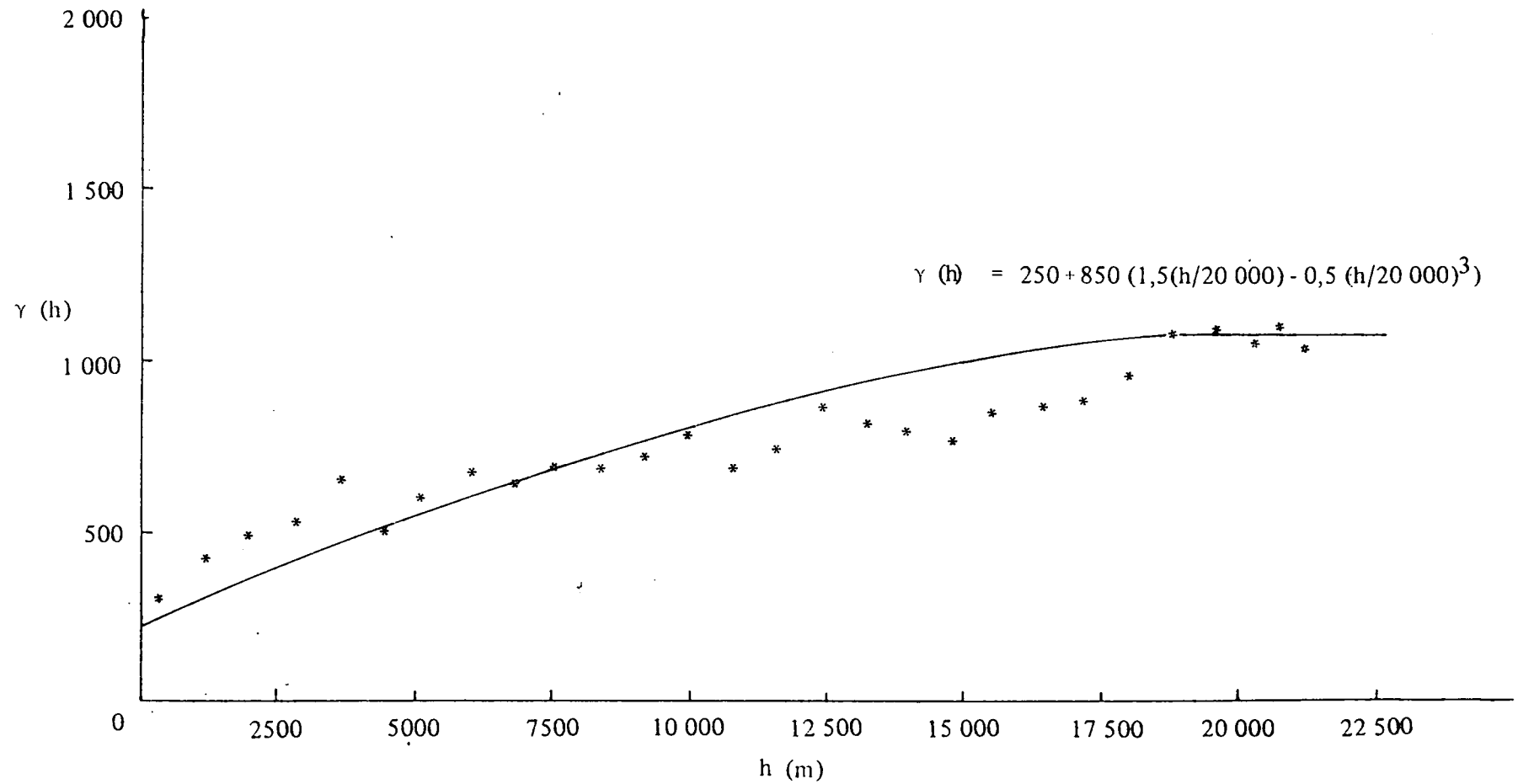
Figuur 5.2.1. Geologie van die Vryburg-omgewing.



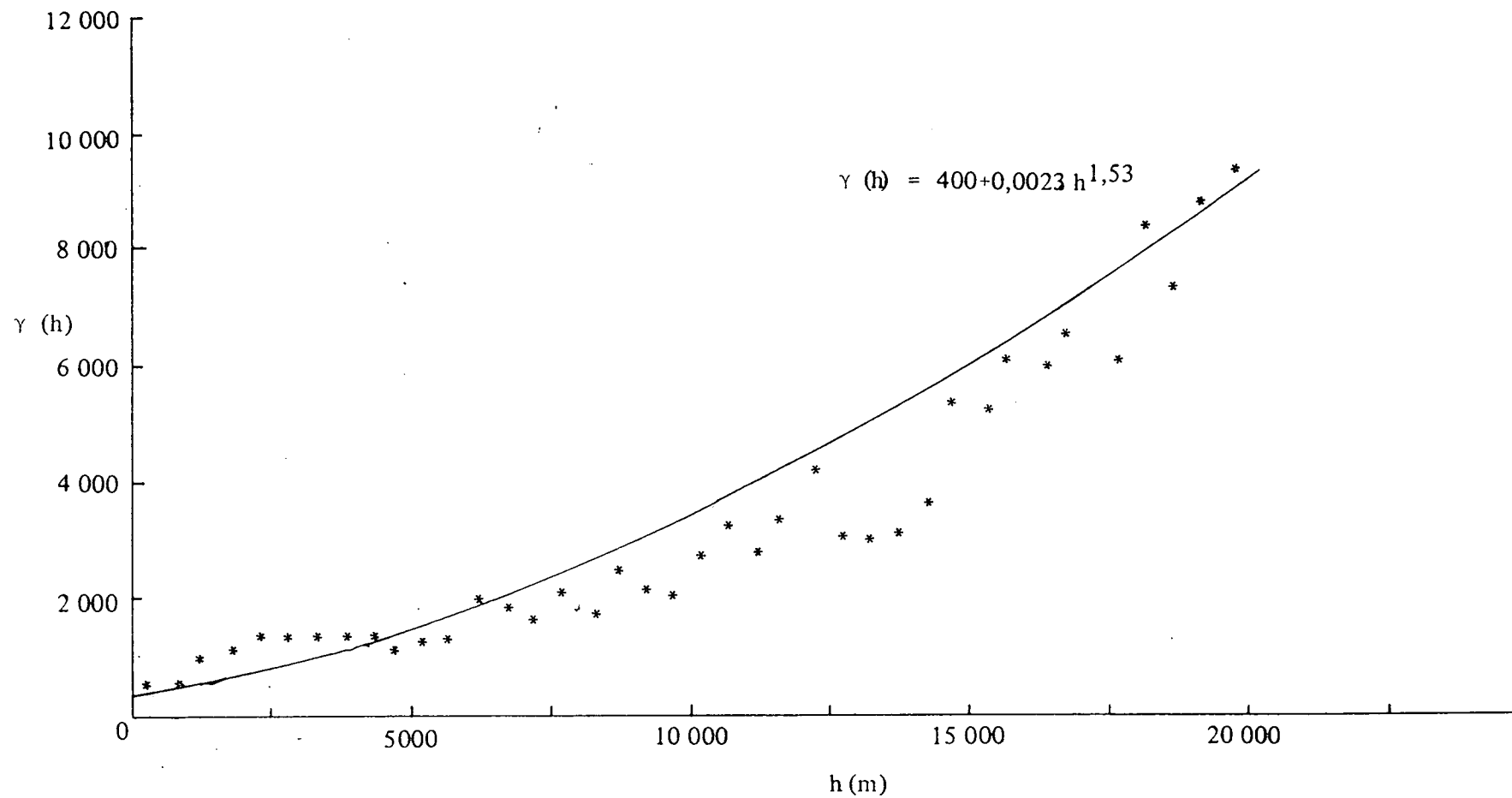
Figuur 5.2.2. Posisies van 91 boorgate in die Vryburg-omgewing.



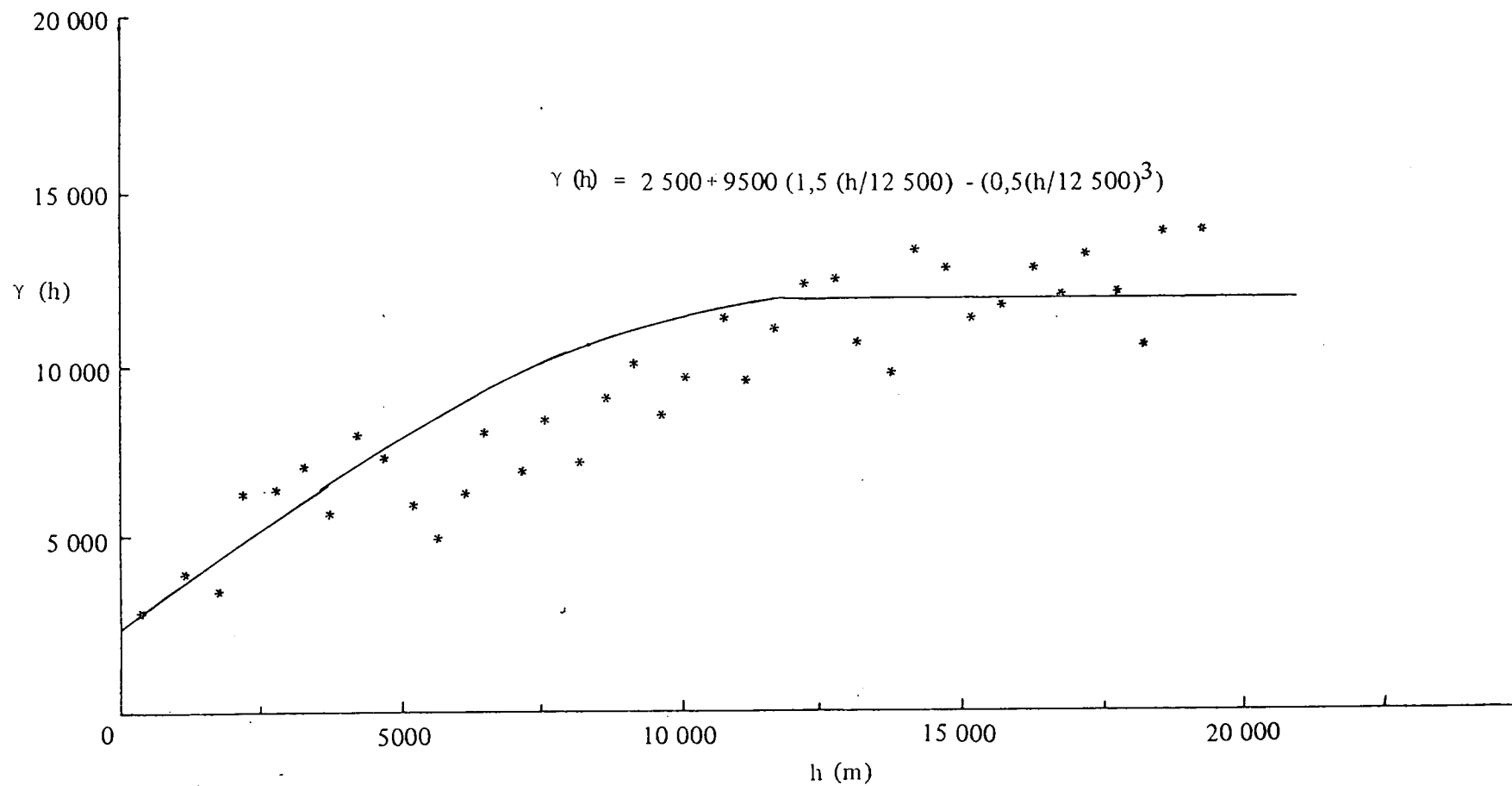
Figuur 5.2.3. Faktoranalise-resultate wat op 3 tipes grondwater dui.



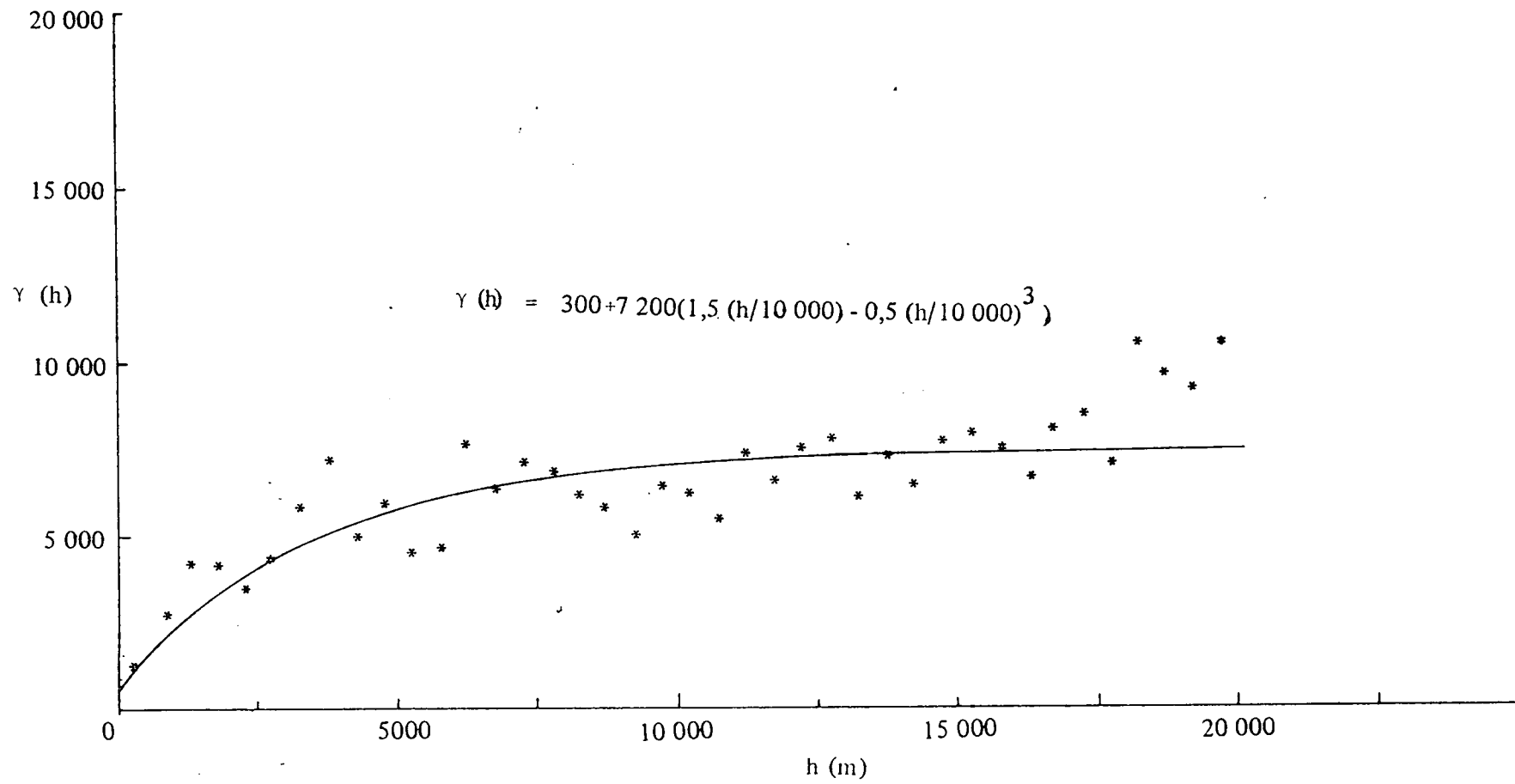
Figuur 5.3.1. Eksperimentele kalsium semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.



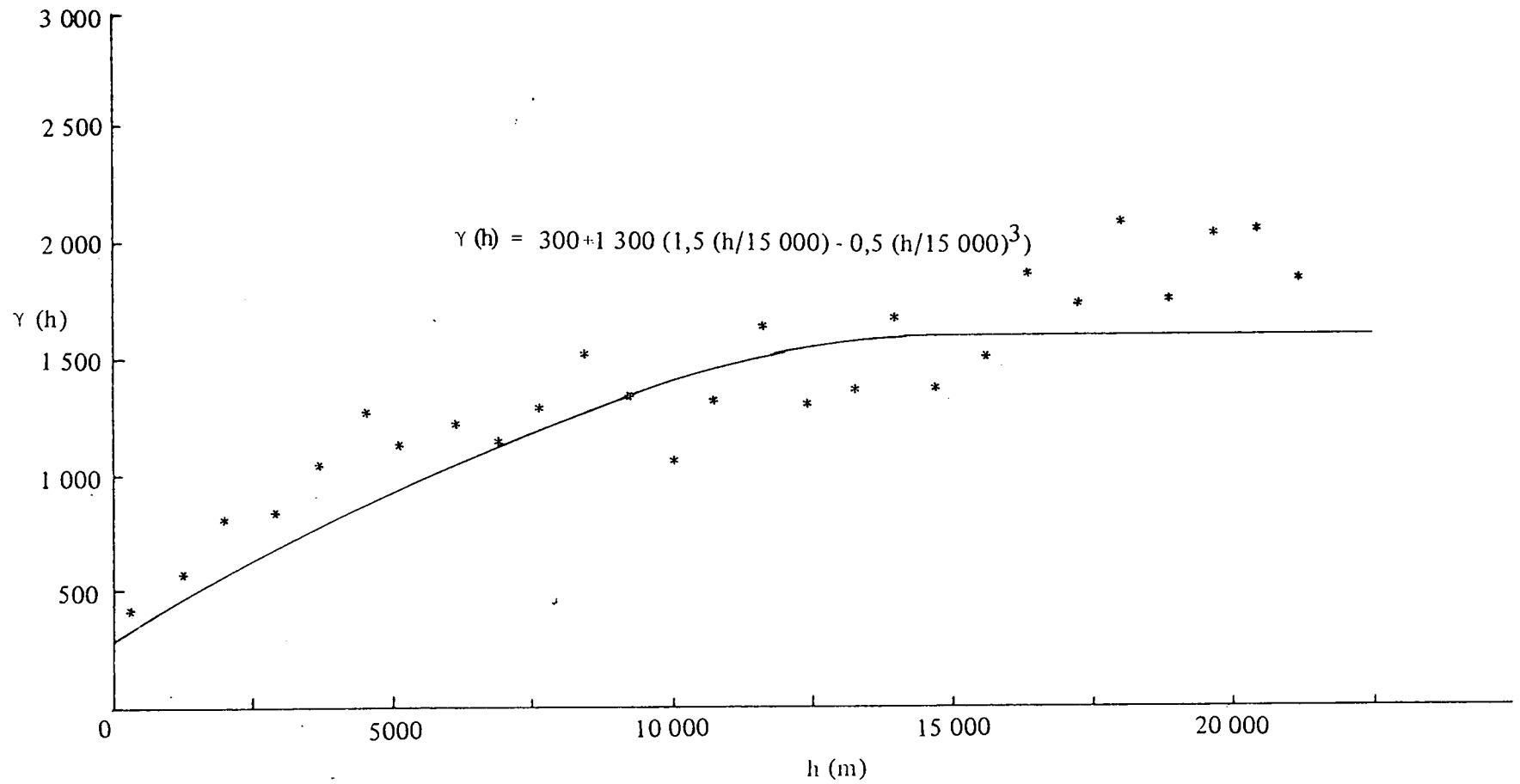
Figuur 5.3.2. Eksperimentele natrium semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.



Figuur 5.3.3. Eksperimentele bikarbonaat semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.



Figuur 5.3.4. Eksperimentele chloried semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.



Figuur 5.3.5. Experimentele sulfaat semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.

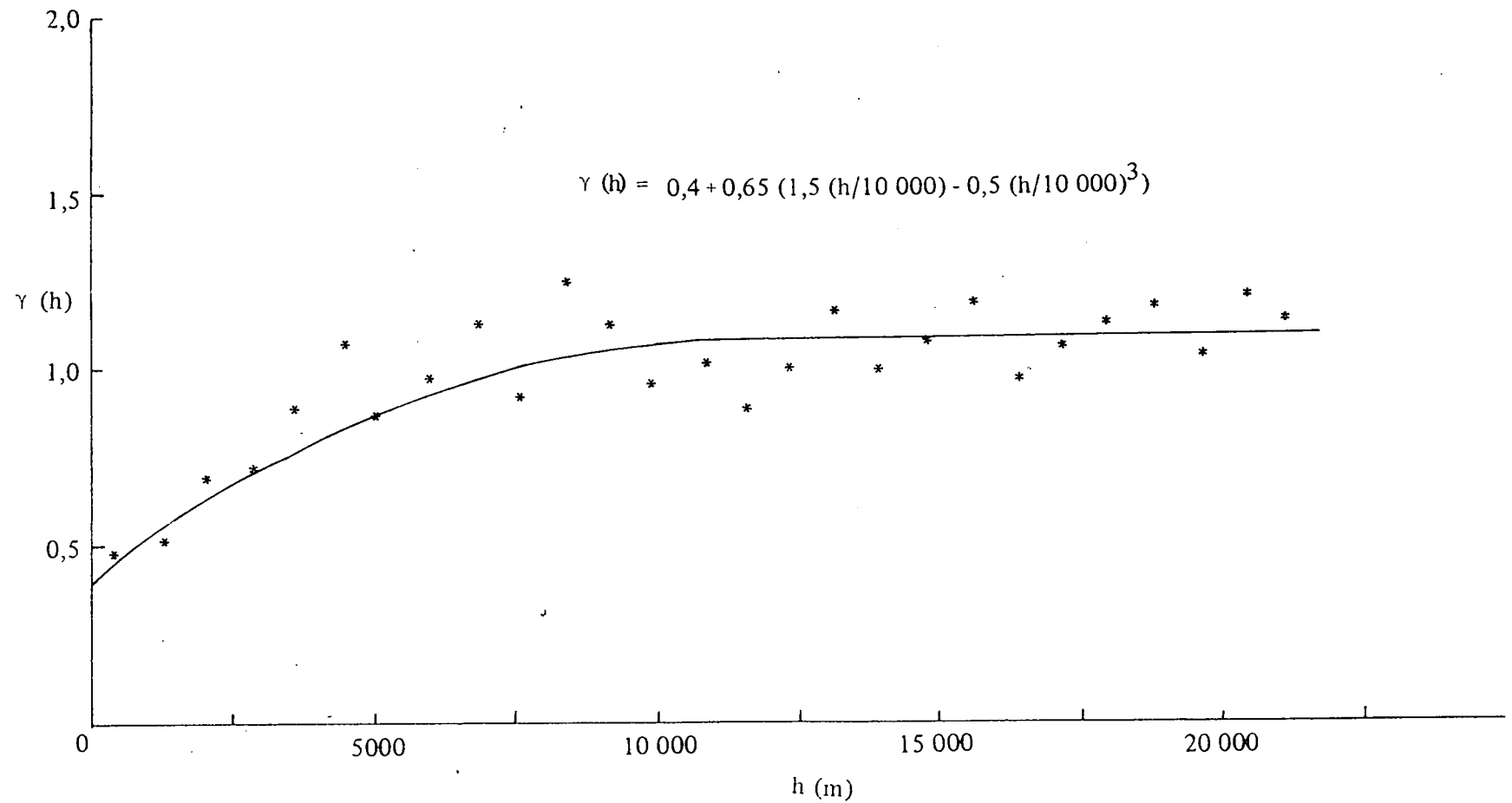
getoon. Die chemiese elemente is ook met behulp van 'n R-module faktor-analise in twee faktore gegroepeer, naamlik 'n Ca/Cl/SO₄ faktor (faktor 1) en 'n NaHCO₃ faktor (faktor 2) en die gewigte van hierdie faktore is by die 91 boorgate bereken. Die semi-variogramme van hierdie twee faktore word in figure 5.3.6 en 5.3.7 getoon. Hierdie twee faktore weerspieël onderskeidelik 'n relatiewe ou stagnante water en 'n jong bewegende tipe water. Die semi-variogramme in figure 5.3.1 - 5.3.7 vertoon, met twee uitsonderings, almal 'n sferiese gedrag. Die uitsonderings is dié (figure 5.3.2 en 5.3.7) waar Na teenwoordig is, wat 'n tendens vertoon. Dit is moeilik om bloot op grond van die inligting bekend 'n verklaring vir die gedrag te gee. Hierdie gedrag is egter nie teenstrydig met die beskrywing van die veroudering van grondwater in paragraaf 5.1 nie. Inderwaarheid sou mens juis so 'n gedrag verwag.

Alhoewel bostaande resultate slegs betrekking op een besondere akwifereer het, wil dit tog voorkom asof gewone kriging met sukses op hidrochemiese data toegepas kan word. Die enigste uitsondering is waar Na of 'n verbinding daarvan ondersoek word, in welke geval van universele kriging gebruik gemaak moet word. Voordat die beginsel egter universeel toegepas word, sal data van veel meer akwifereer ondersoek moet word.

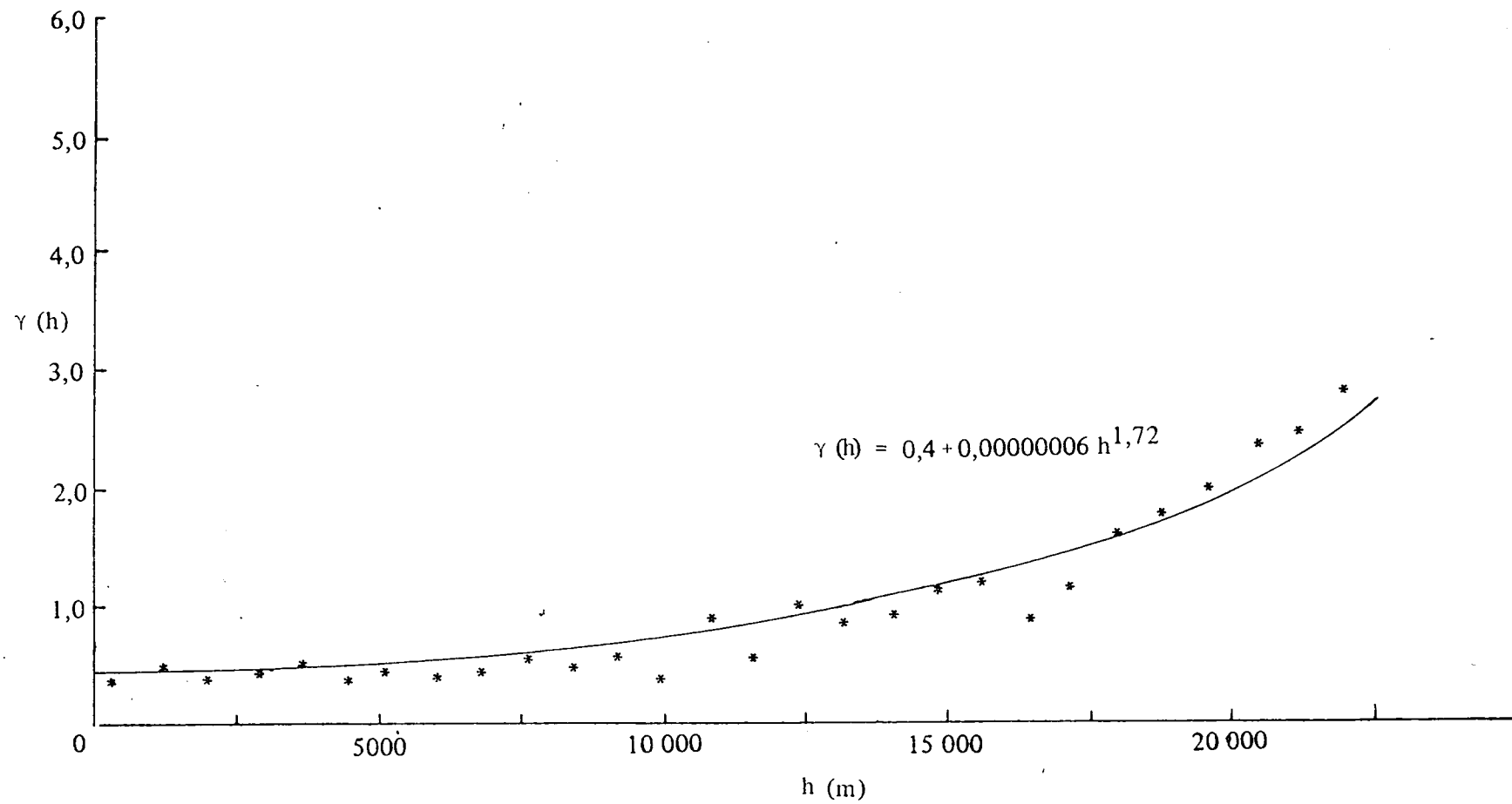
Nieteenstaande bogenoemde tekortkominge is daar tog oorgegaan tot die daarstelling van kontoerkaarte vir die hidrochemiese data van die Vryburg-kompartement. Vir die doel is gewone kriging in die geval van Ca, HCO₃, Cl, SO₄ en die Ca/Cl/SO₄ faktor gebruik (kyk figure 5.3.8 - 5.3.12), terwyl die universele kriging vir die kontoere van Na en die NaHCO₃ faktor gebruik is (kyk figure 5.3.13 en 5.3.14). Die toetsstatistieke van al die krigingmodelle word in tabel 5.3.1 getoon.

TABEL 5.3.1. TOETSSTATISTIEKE VIR DIE KRIGINGMODELLE VIR DIE HIDROCHEMIESE ELEMENTE VAN DIE VRYBURGKOMPARTEMENT

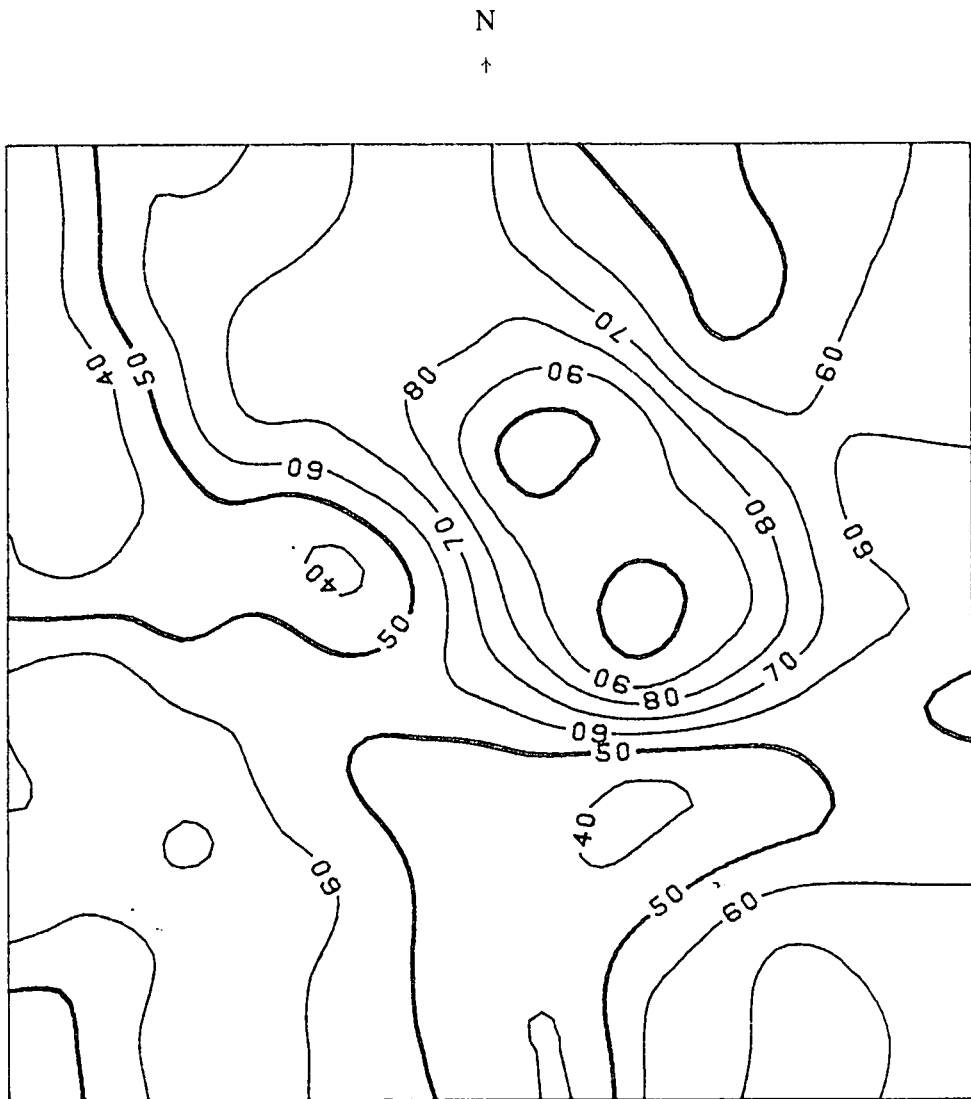
	ELEMENT						faktor 1	faktor 2
	Ca	Na	HCO ₃	Cl	SO ₄			
KGF	0,18	-0,22	0,39	-1,03	1,1	0,02	0,02	
KSS	1,04	1,31	1,18	0,78	1,27	1,1	1,08	



Figuur 5.3.6. Eksperimentele Ca/Cl/SO_4 (faktor 1) semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.

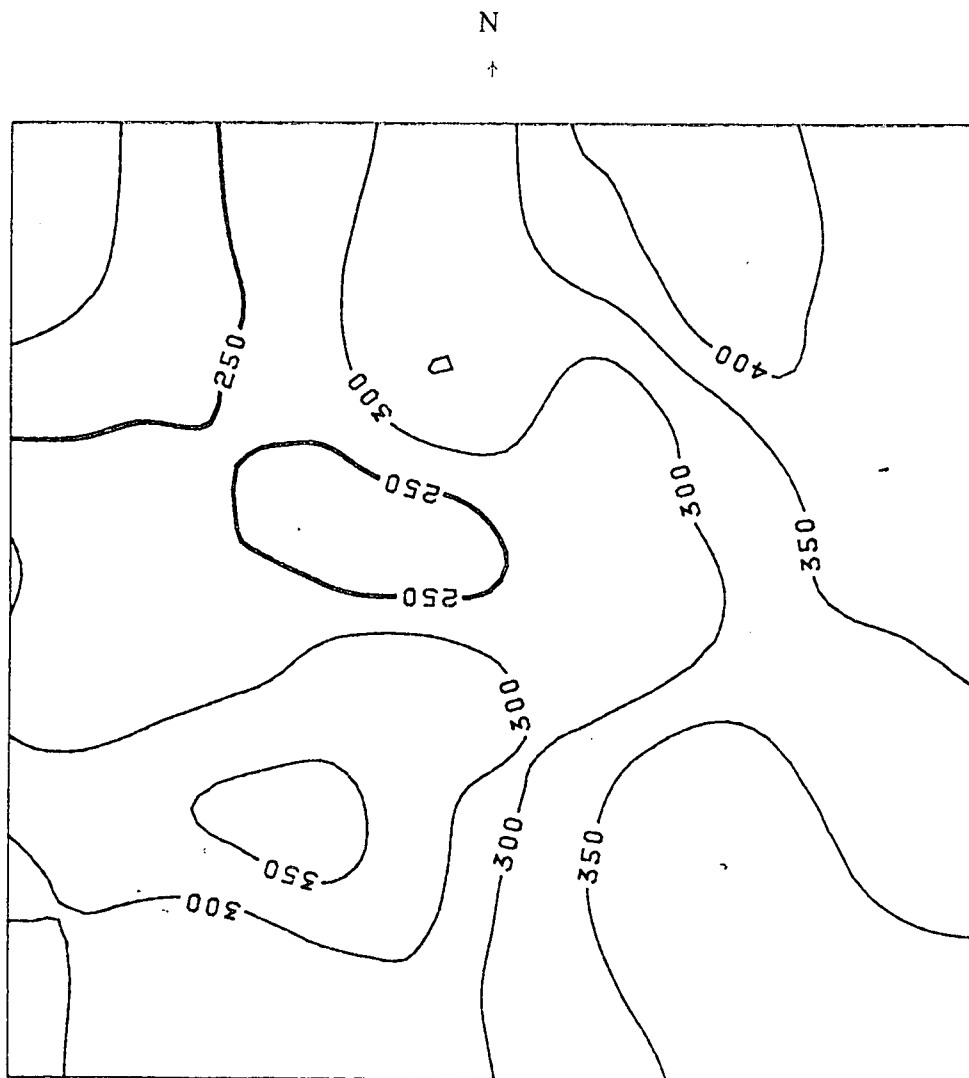


Figuur 5.3.7. Eksperimentele NaHCO_3 (faktor 2) semi-variogram van die Vryburgkompartement met passingsmodel.

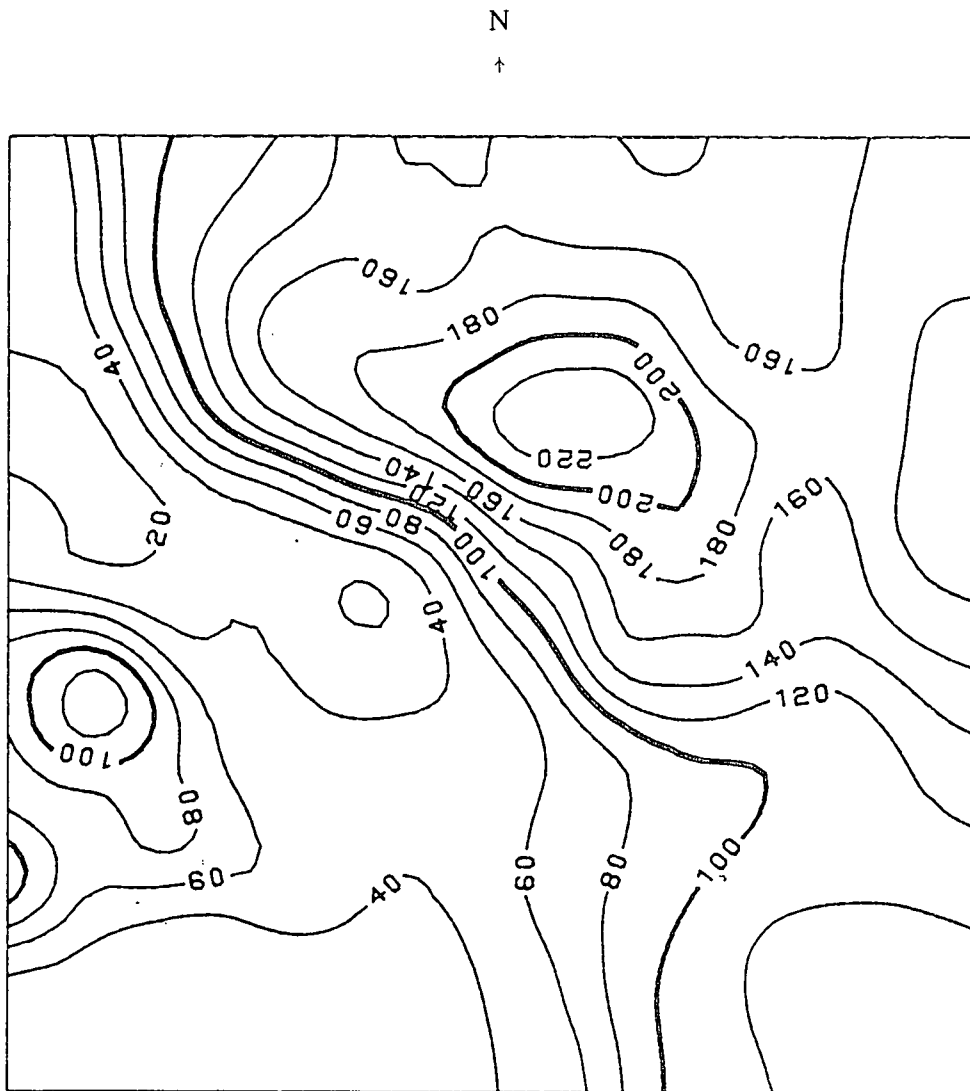


Figuur 5.3.8. Kalsiumkontoere van die Vryburgkompartement soos met

behulp van gewone kriging verkry.

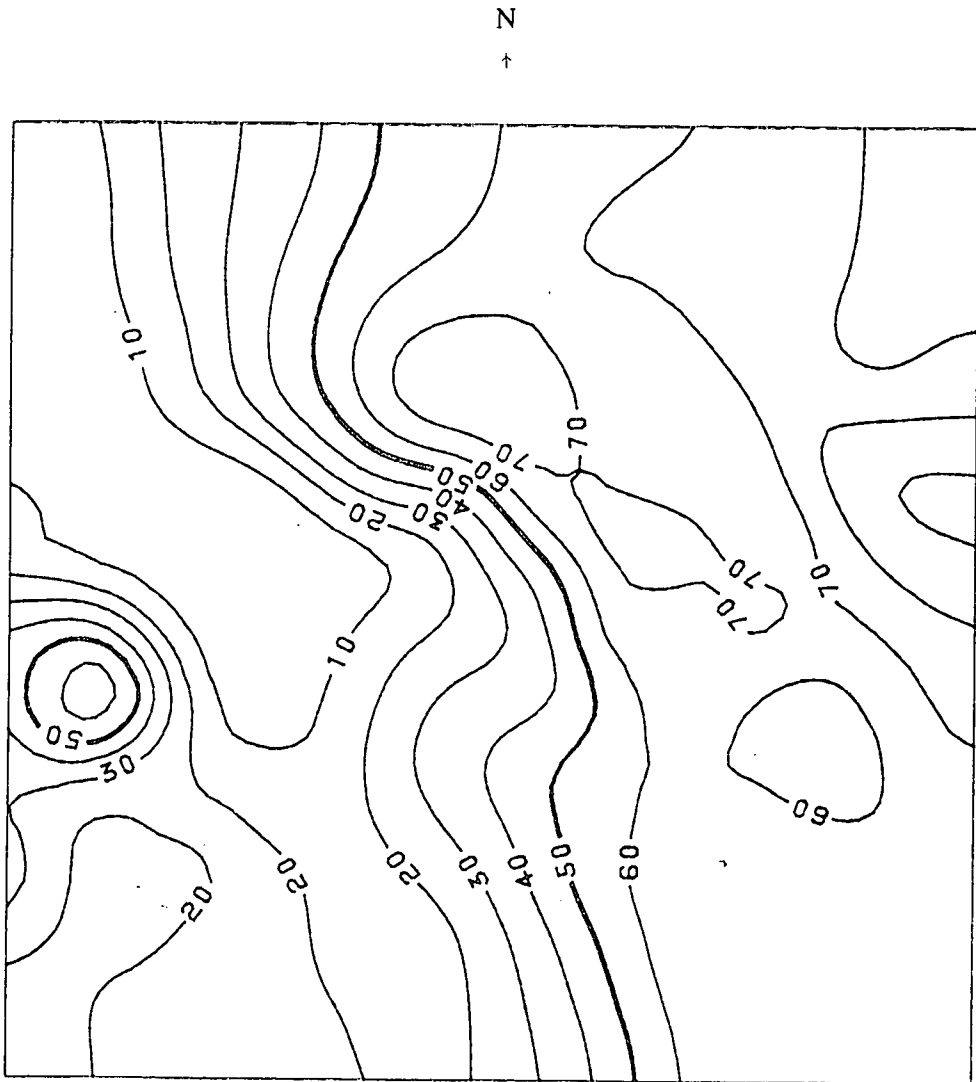


Figuur 5.3.9. Bikarbonaatkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.

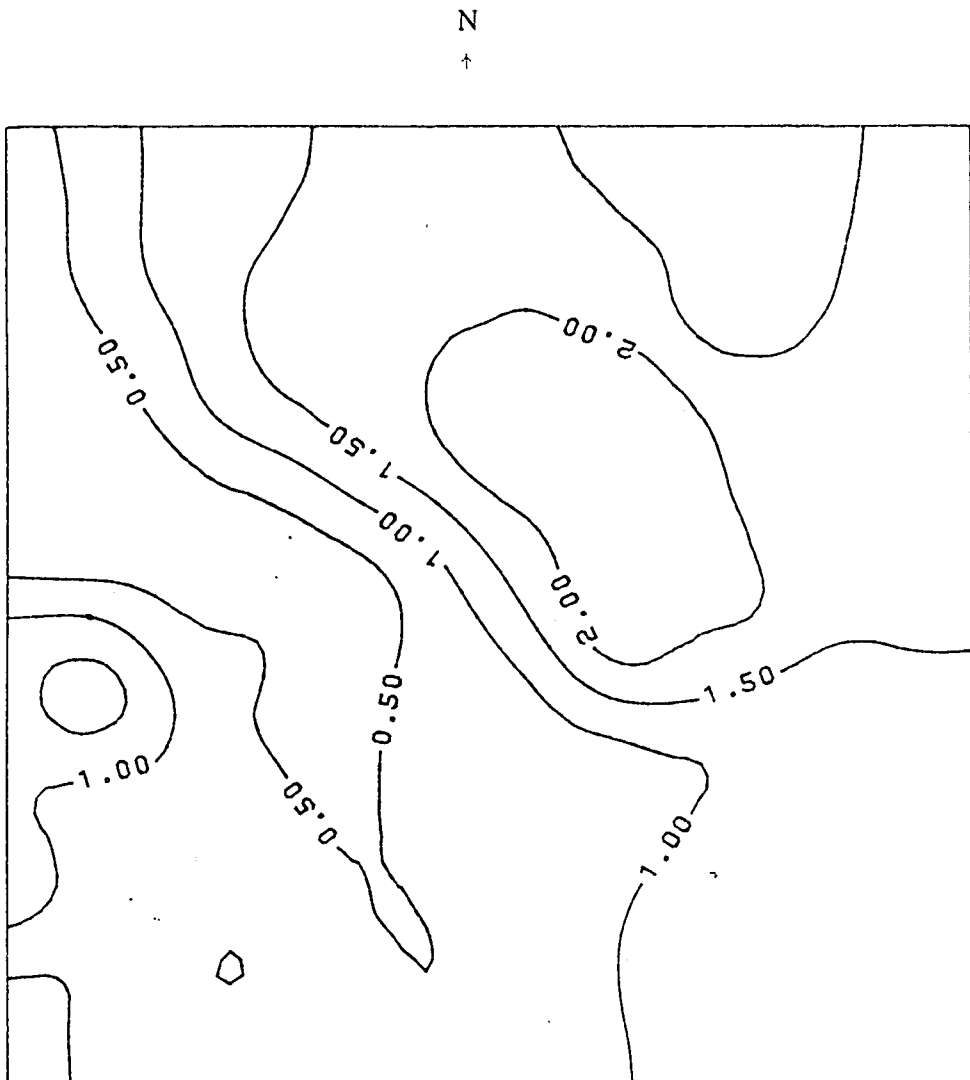


Figuur 5.3.10. Chloriedkontoere van die Vryburgkompartement soos met .

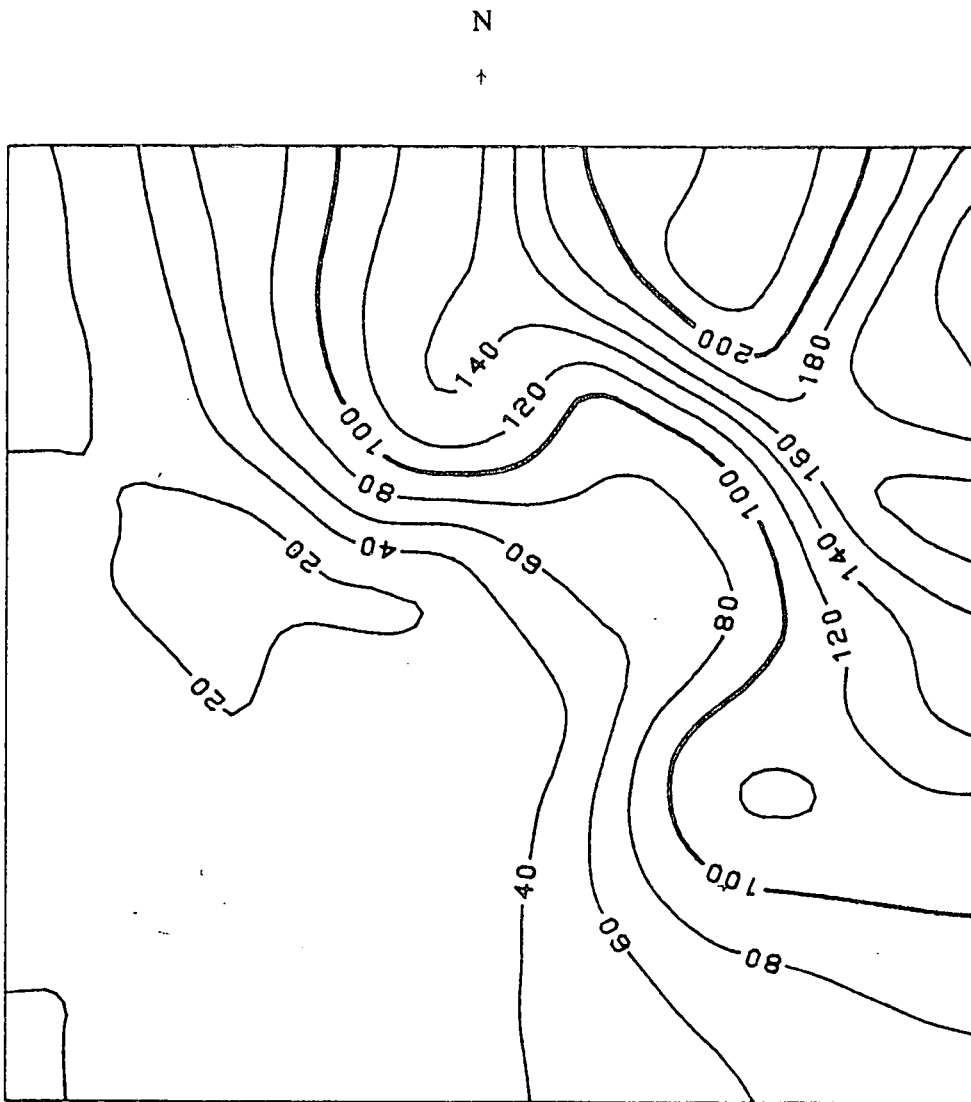
behulp van gewone kriging verkry.



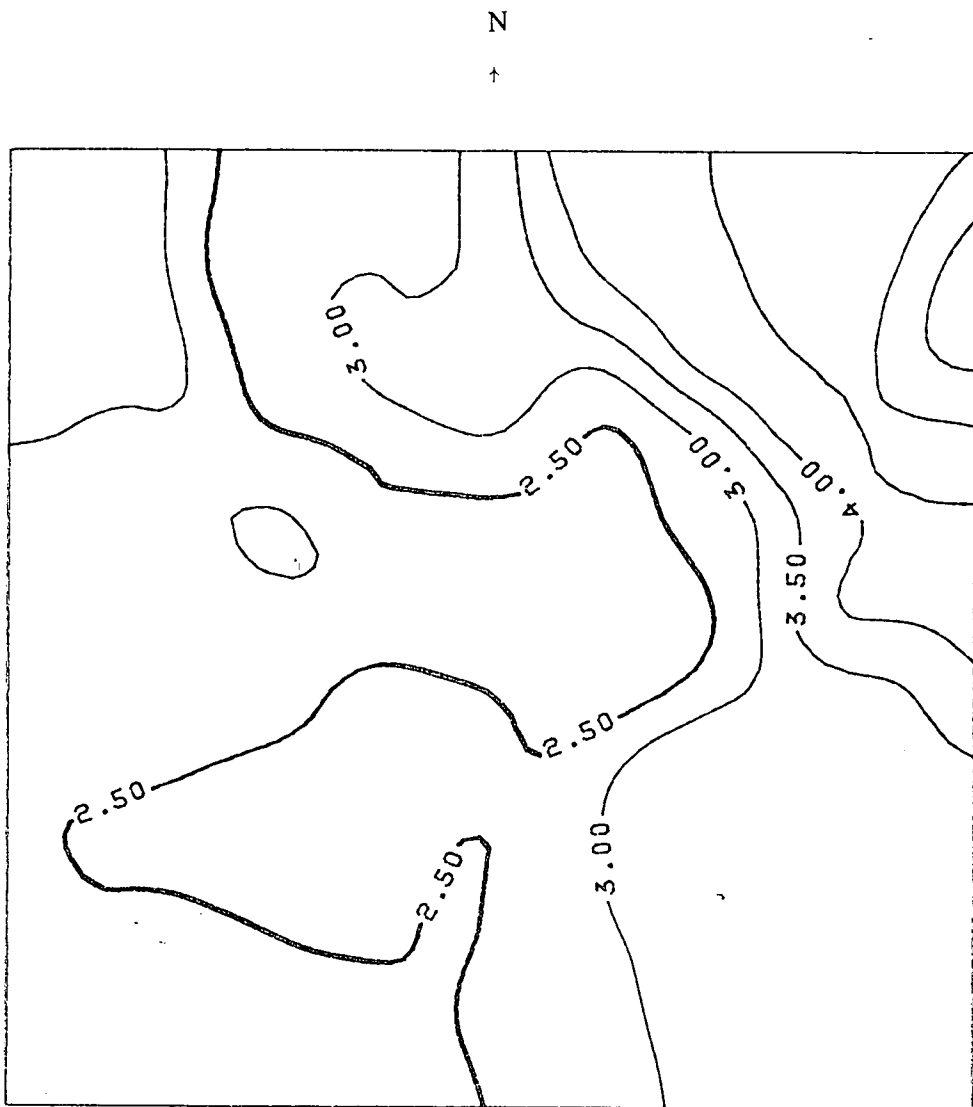
Figuur 5.3.11. Sulfaatkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.



Figuur 5.3.12. Die faktor $Ca/Cl/SO_4$ -kontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van gewone kriging verkry.



Figuur 5.3.13. Natriumkontoere van die Vryburgkompartement soos met behulp van universele kriging verkry.



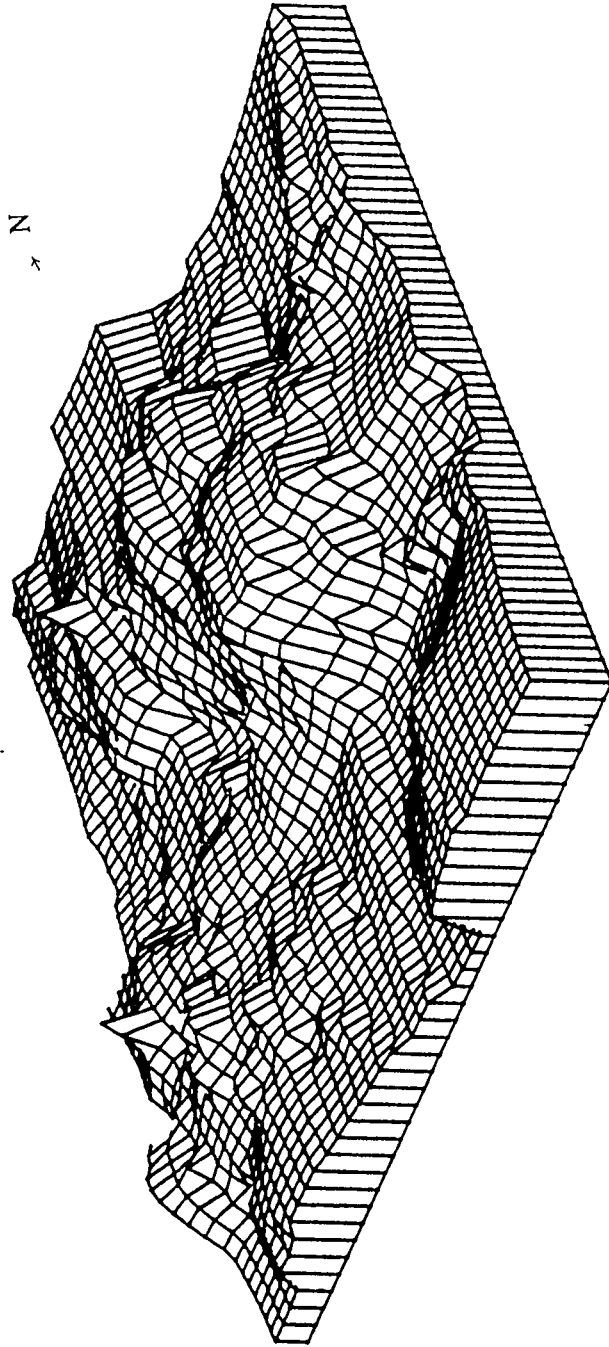
Figuur 5.3.14. Die faktor NaHCO_3 -kontoere van die Vryburgkompartement

soos met behulp van universele kriging verkry.

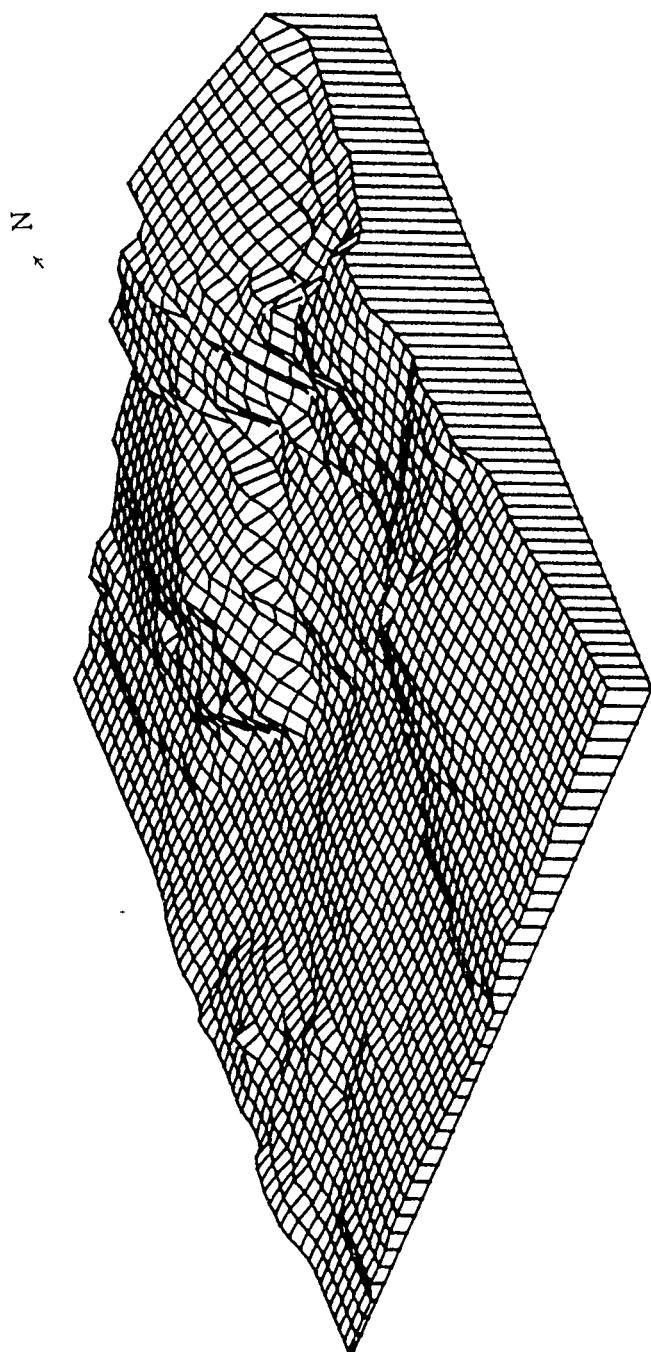
Uit hierdie tabel is dit duidelik dat die toetsstatistieke, binne redelike mate, toon dat die gebruikte modelle aanvaarbaar is.

Die beste manier om hierdie kontoerkaarte te bestudeer, is om van die ingeslote deurskynende geologieskaart gebruik te maak (kyk in sakkie op agterblad). As hierdie kaart op die verskillende kontoerkaarte gelê word, is dit duidelik dat die kontoere ongeveer parallel aan die strekking van die verskillende gesteentes loop. Soos wat verwag kan word, vertoon die chemiese samestelling van die water 'n noue verband met die gesteente waarin dit voorkom. Die data vertoon in die algemeen ook 'n goeie ooreenkoms met die chronologiese ontwikkeling van grondwater soos in paragraaf 5.1 geskets. Die enigste uitsondering is miskien die Ca en HCO_3 konsentrasie in die Allanridge-lawa. Dit kan moontlik aan die invoering van jong water deur nate en krake in die lawa toegeskryf word. Daarbenewens moet in gedagte gehou word dat uiters min bekend is omtrent die invloed van druk, temperatuur, versadiging en uitruilvermoë van die grondwaterione op die hidrochemie. 'n Mens moet dus baie versigtig wees om nie te veel afleidings van chemiese kontoerkaarte te probeer maak nie. 'n Driedimensionale voorstelling van al die hidrochemiese parameters word in figure 5.3.15 - 5.3.21 getoon.

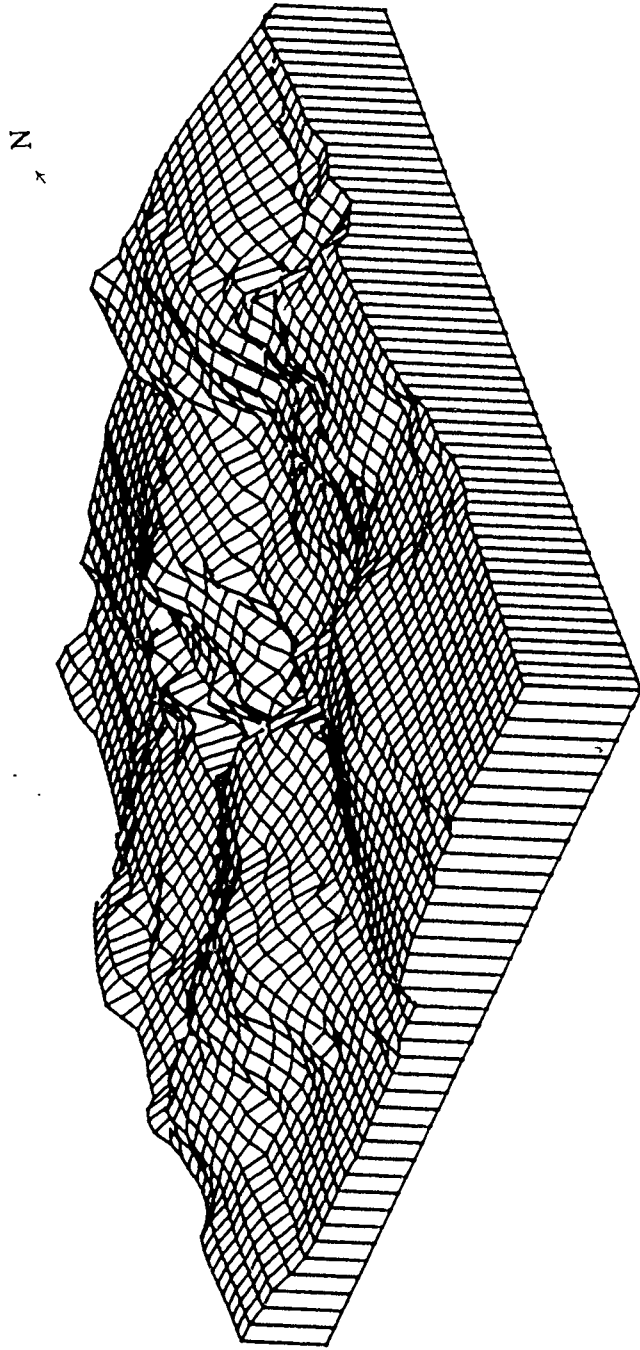
Die resultate hier behaal, toon aan dat kriging wel met sukses gebruik kan word by die interpolasie van hidrochemiese data van 'n bepaalde grondwatersisteem.



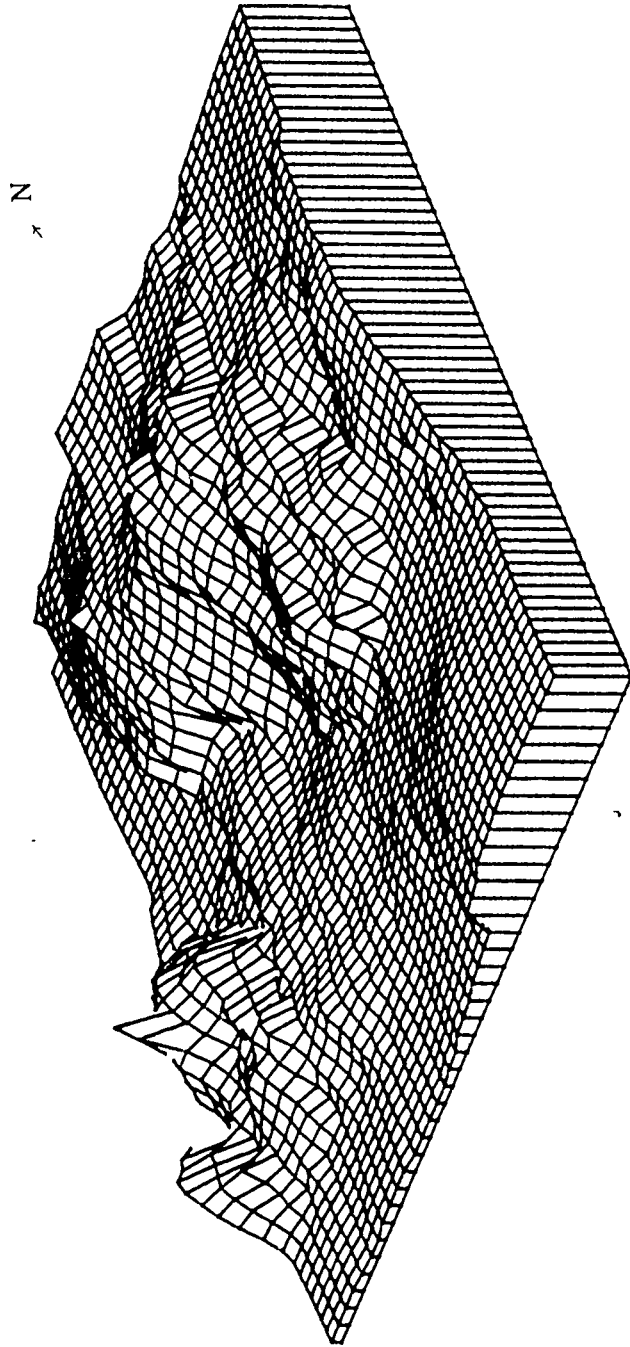
Figuur 5.3.15. Driedimensionale voorstelling van die kalsium in die Vryburgkompartement.



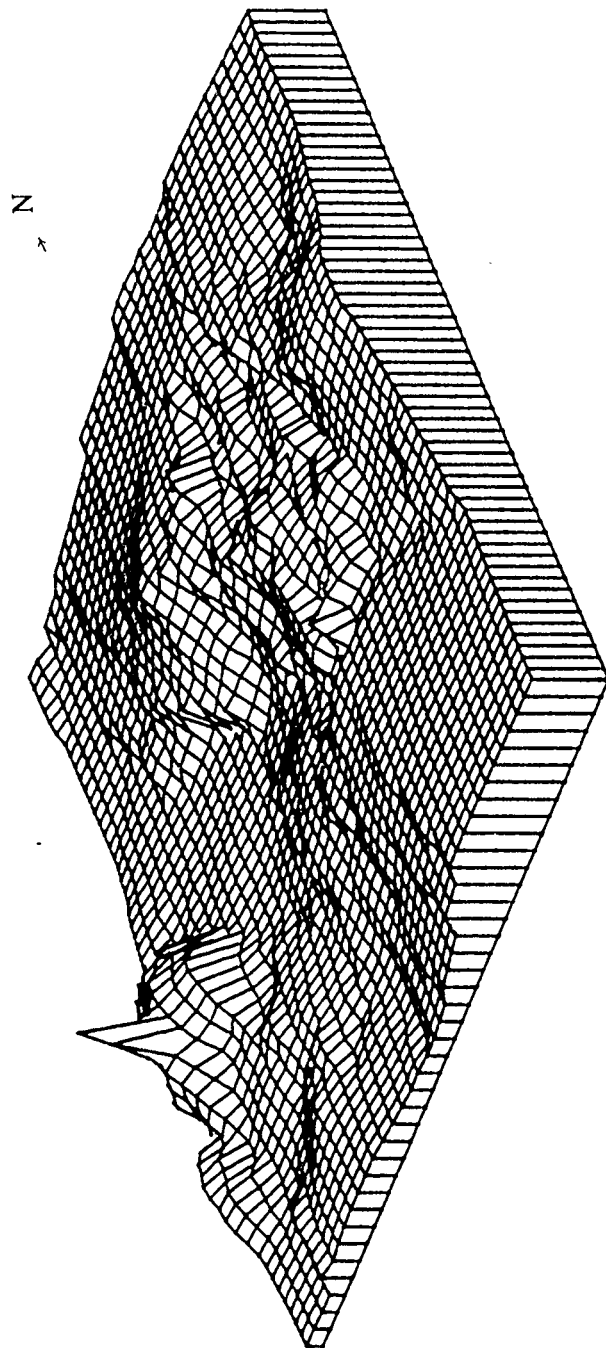
Figuur 5.3.16. Driedimensionale voorstelling van die natrium in die Vryburgkompartement.



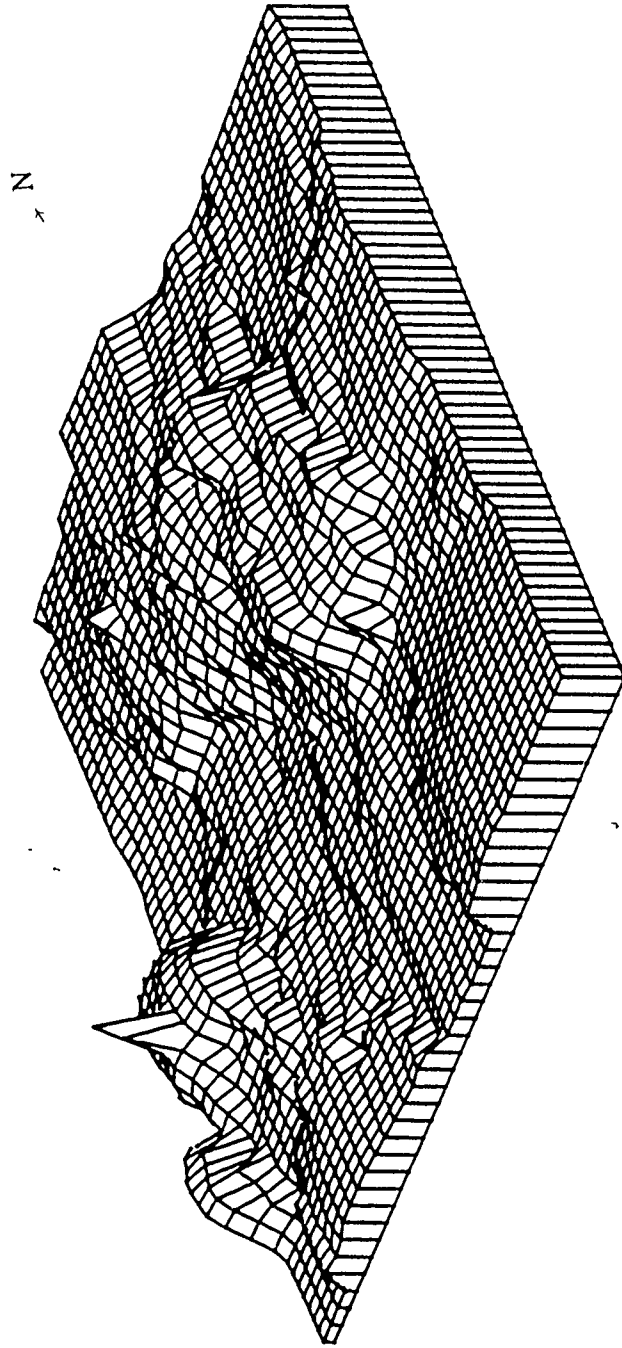
Figuur 5.3.17. Driedimensionale voorstelling van die bikarbonaat in die Vryburgkompartement.



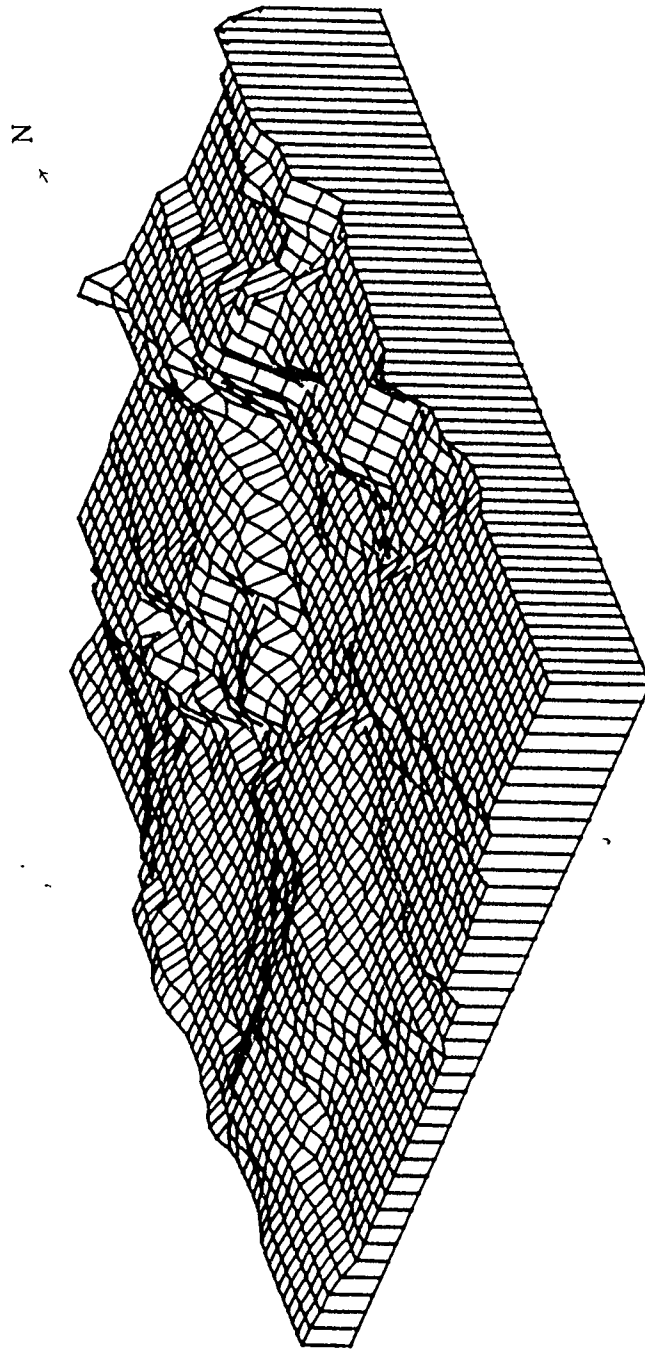
Figuur 5.3.18. Driedimensionale voorstelling van die chloried in die Vryburgkompartement.



Figuur 5.3.19. Driedimensionale voorstelling van die sulfaat in die Vryburgkompartement.



Figuur 5.3.20. Driedimensionale voorstelling van faktor 1 in die Vryburgkompartement.



Figuur 5.3.21. Driedimensionale voorstelling van faktor 2 in die Vryburgkompartement.

HOOFSTUK 6

INTERPOLASIE VAN GRAVIMETRIESE DATA

6.1 ALGEMEEN

Soos welbekend, is die gravitasieversnelling (g) wat 'n liggaam in die onmiddellike omgewing van die aardoppervlakte ondervind, te wyte aan die aantrekkingskrag wat die aarde daarop uitoefen en die Corioliskrag wat ontstaan as gevolg van die rotasie van die aarde. Die totale krag F wat op so 'n liggaam met massa m uitgeoefen word, kan gerieflik voorgestel word met behulp van Newton se tweede wet in die vorm $F = mg$.

As aanvaar word dat die aarde 'n homogene afgeplatte sferoïde is, kan die variasie van g by seevlak met die breedtegraad ϕ uitgedruk word in die vorm (Parasnis; 1973) :

$$g = 9,78049 (1 + 0,00528838 \sin^2 \phi - 0,0000059 \sin^2 2 \phi) \text{ m/s}^2 \quad (6.1)$$

Ongelukkig is die digtheid van die aarde nie homogeen nie, d.w.s. gelyke volumes het nie gelyke massas nie. Gevolglik verskil die werklike waarde van g van dié bereken met behulp van (6.1). Hierdie verskil, gewoonlik uitgedruk in milligals, word 'n gravitasie-anomalie genoem. In die geofisika word daar ook na die anomalie as die Bouguer-anomalie verwys. Deur dus 'n noukeurige opname van die Bouguer-anomalie te maak, kan daar heelwat omtrent die interne struktuur van die aarde agtergekom word, veral in gebiede naby die oppervlakte. In die besonder behoort die metode baie doeltreffend in die opsporing van oplossingsholtes en verweringsones wat in die dolomitiese gebiede van Noordwes-Kaapland en Wes-Transvaal voorkom, te wees.

Die veldmetings wat benodig word vir so 'n gravitasie-opname is egter 'n duur en tydrowende proses (mnr. F. Wiegman van Waterwese – persoonlike mededeling). Gevolglik word dit gewoonlik net gebruik wanneer ander goedkoper metodes nie beskikbaar en die gebied nie te groot is nie. Weens die druk van die groeiende bevolking van die Republiek van Suid-Afrika, het die gedagte by die Afdeling Waterwese van die Departement Omgewingsake en Visserye ontstaan om ondersoek na die voorkoms van water in die dolomitiese gebiede van Wes-Transvaal in te stel. 'n Gravimetrieë ondersoek van die gebied op die gewone skaal is, gesien vanuit die mannekragsposisie en finansiële oogpunt, net eenvoudig 'n onbegonne taak. Gelukkig is daar egter 'n gedetailleerde ondersoek van die Zuurbekomkompartement, uitgevoer deur die Geologiese Opname van Suid-Afrika, beskikbaar. Die Instituut vir Grondwaterstudies aan die Universiteit van die Oranje-Vrystaat is gevolglik deur die Afdeling Waterwese genader met die versoek dat hierdie data gebruik word om ondersoek in te stel na die moontlikheid dat kriging gebruik word om die aantal waarnemingspunte in so 'n opname te verminder, sonder noemenswaardige verlies in akkuraatheid van die berekende volumes van die oplossingsholtes en verweringsones.

Kriging is vantevore in die geofisika gebruik om seismiese snelhede te interpoleer (Haas en Viallix; 1976). Hulle het gevind dat, gesien in die lig van die ruimte-afhanklikheid van die snelhede en as in ag geneem word dat 'n foutskatting geredelik maklik bepaal kan word, kriging meer doeltreffend as enigeen van die meer aanvaarbare ander metodes is. Hulle spreek verder die gedagte uit dat kriging ook goed behoort te werk vir Bouguer-anomalië. Gegrand op hierdie werk is daar besluit om aan die versoek van Waterwese te voldoen.

6.2 INTERPOLASIE VAN GRAVITASIE-OPNAMES IN DIE ZUUR-BEKOMKOMPARTEMENT

Die aanvanklike veldmetings in genoemde kompartement is op 'n 100 m by 100 m ruit oor 'n gebied van 16 vierkante kilometer uitgevoer (kyk figuur

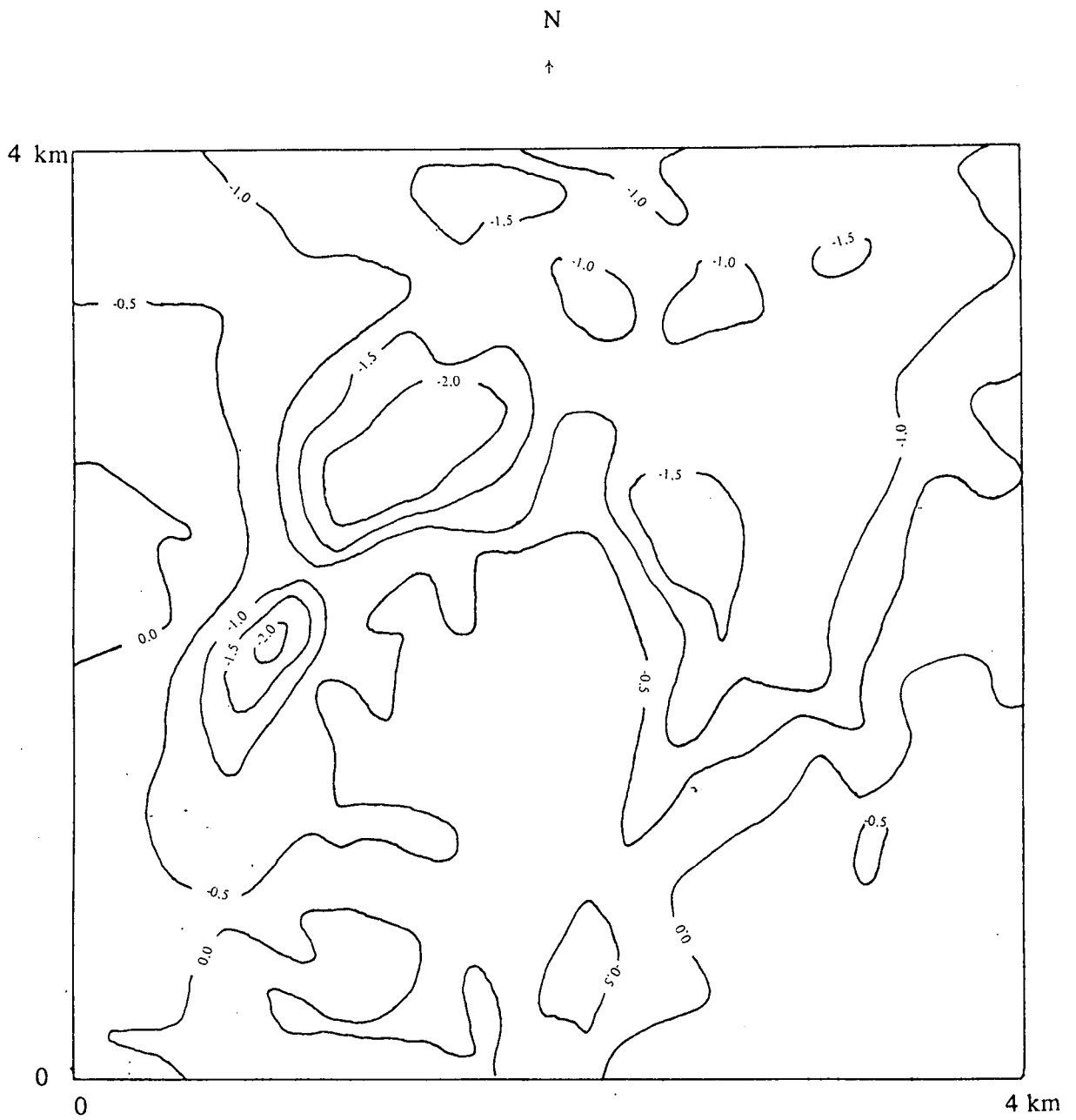
6.2.1 vir die handkontoere van die 1 600 milligalwaardes soos deur Waterwese beskikbaar gestel).

Die eksperimentele semi-variogram, bepaal vanaf die 1 600 punte, word in figuur 6.2.2 getoon. Soos blyk uit die figuur, pas 'n sferiese model met 'n klonteffek $C_0 = 0,013$ die waardes besonder goed. Vervolgens is die 81 gravitasiepunte op 'n 500 m by 500 m ruit uit die gegewe data geselekteer (kyk bylae D). 'n Kontoerkaart, gebaseer op die 81 graviwaardes, is vervolgens met behulp van kriging daargestel en word in figuur 6.2.3 getoon. Gesien in die lig van die feit dat hierdie kaart gebaseer is op 5,06 persent van die aantal datapunte in figuur 6.2.1, is die ooreenstemming nogal verbasend goed. Die enigste rede tot klagte is waarskynlik die verswakking in oplosvermoë van die waargenome anomalie.

Die krigingvarians vir die 81 datapunte toon aan dat die grootste leemtes presies tussen elke vier datapunte voorkom. Hierdie 64 datapunte is vervolgens by die 81 gevoeg en die 145 datawaardes weer onderwerp aan kriging. Die ooreenstemmende kontoerkaart word in figuur 6.2.4 getoon. Soos verwag kan word, lewer hierdie 145 datapunte kontoere wat meer ooreenstemmend met dié van die 1 600 punte is.

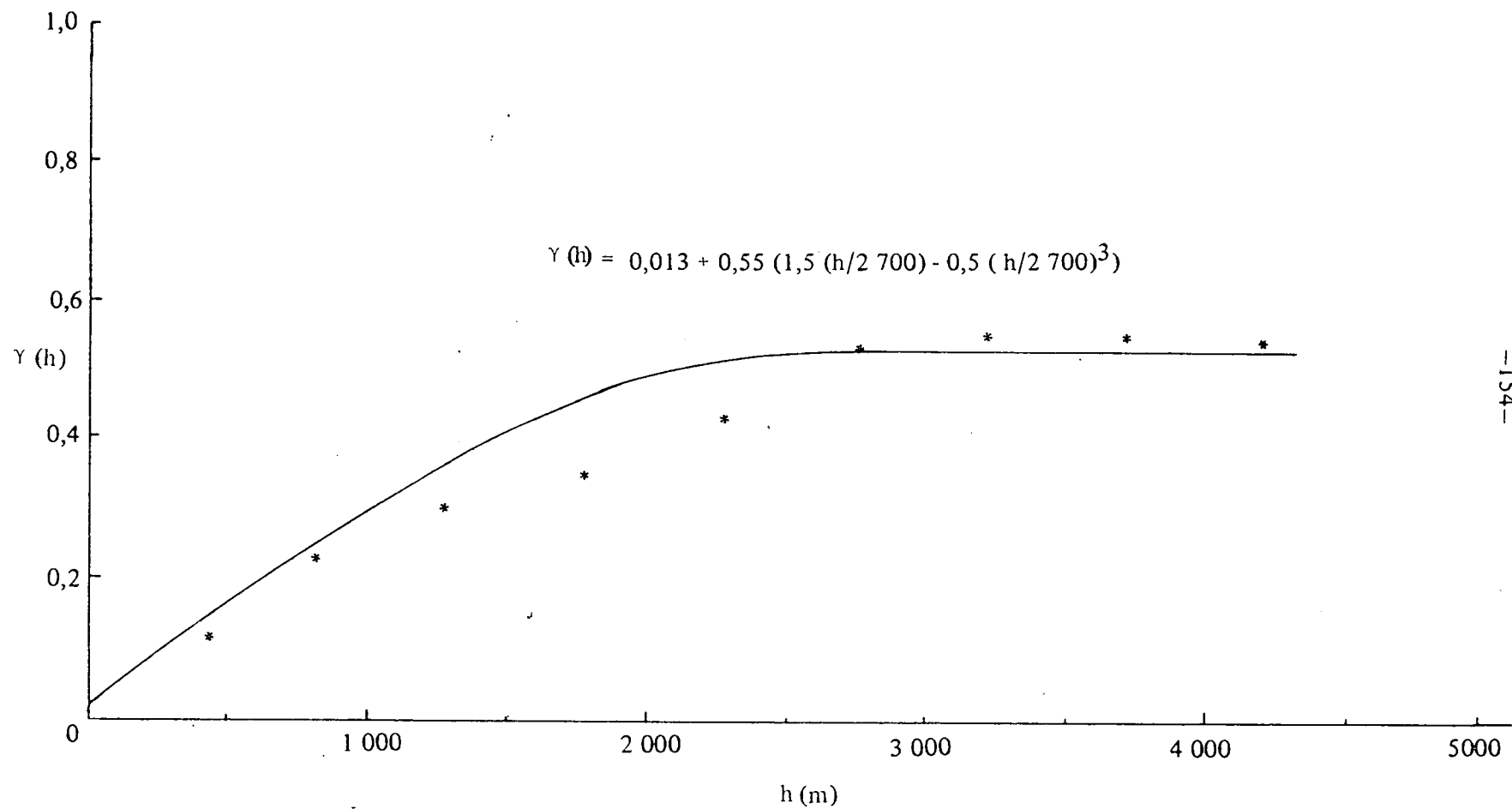
6.3 DIE BEPALING VAN VOLUMES

Soos reeds genoem, weerspieël die waargenome graviwaardes tot 'n groot mate die nie-homogeniteit van die digtheid van die aarde se boonste lae. Deur dus hierdie data korrek te interpreteer, kan daar 'n goeie skatting van die dieptes van oplossingsholtes en verweerde komme in 'n gegewe gebied gemaak word. In hierdie ondersoek is daar vir die doel gebruik gemaak van die tweedimensionale gravitasieprogram van die Geologiese Opname (Harper; 1980). Die verweringsdieptes soos met die 81, 1 600 en 145 graviwaardes verkry, word onderskeidelik in figure 6.3.1, 6.3.2 en 6.3.3 getoon. Met hierdie waardes bekend, kan die volume van die holtes en verweerde sones nou geredelik maklik met behulp van numeriese integrasie bepaal word.

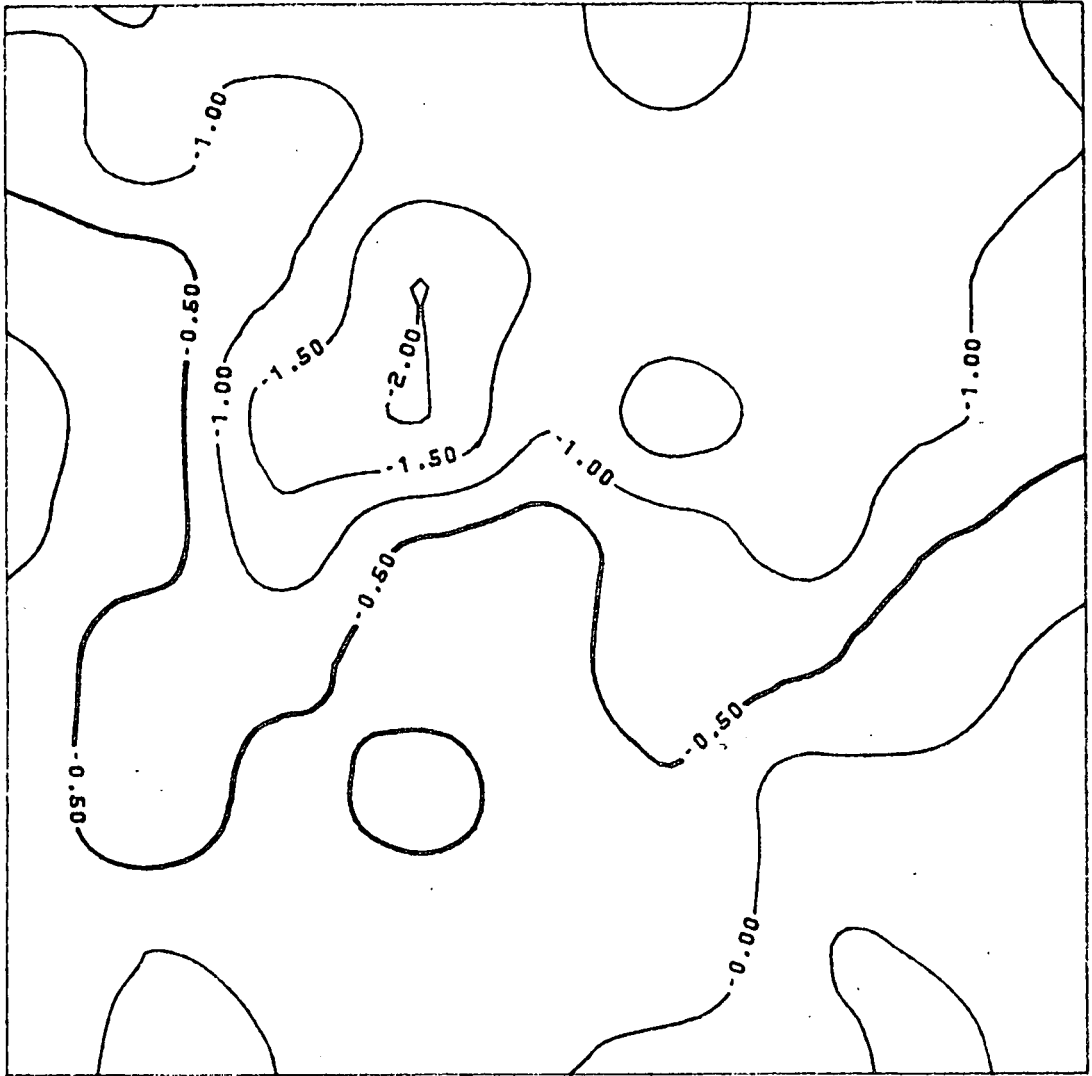


Figuur 6.2.1. Handgravikontoere (in milligals) van die Zuurbekomkompartement

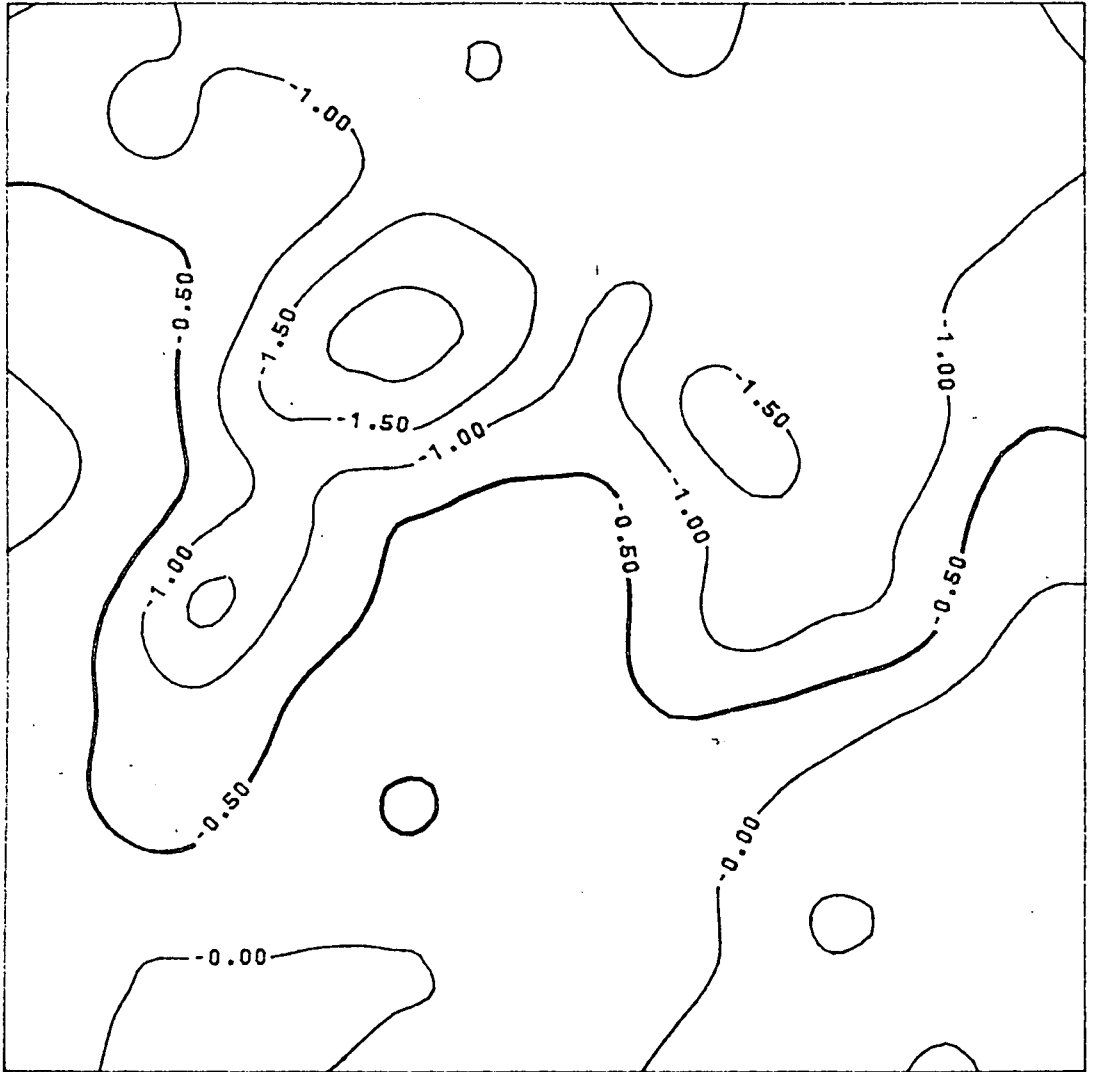
soos met behulp van 1 600 graviwaardes verkry.



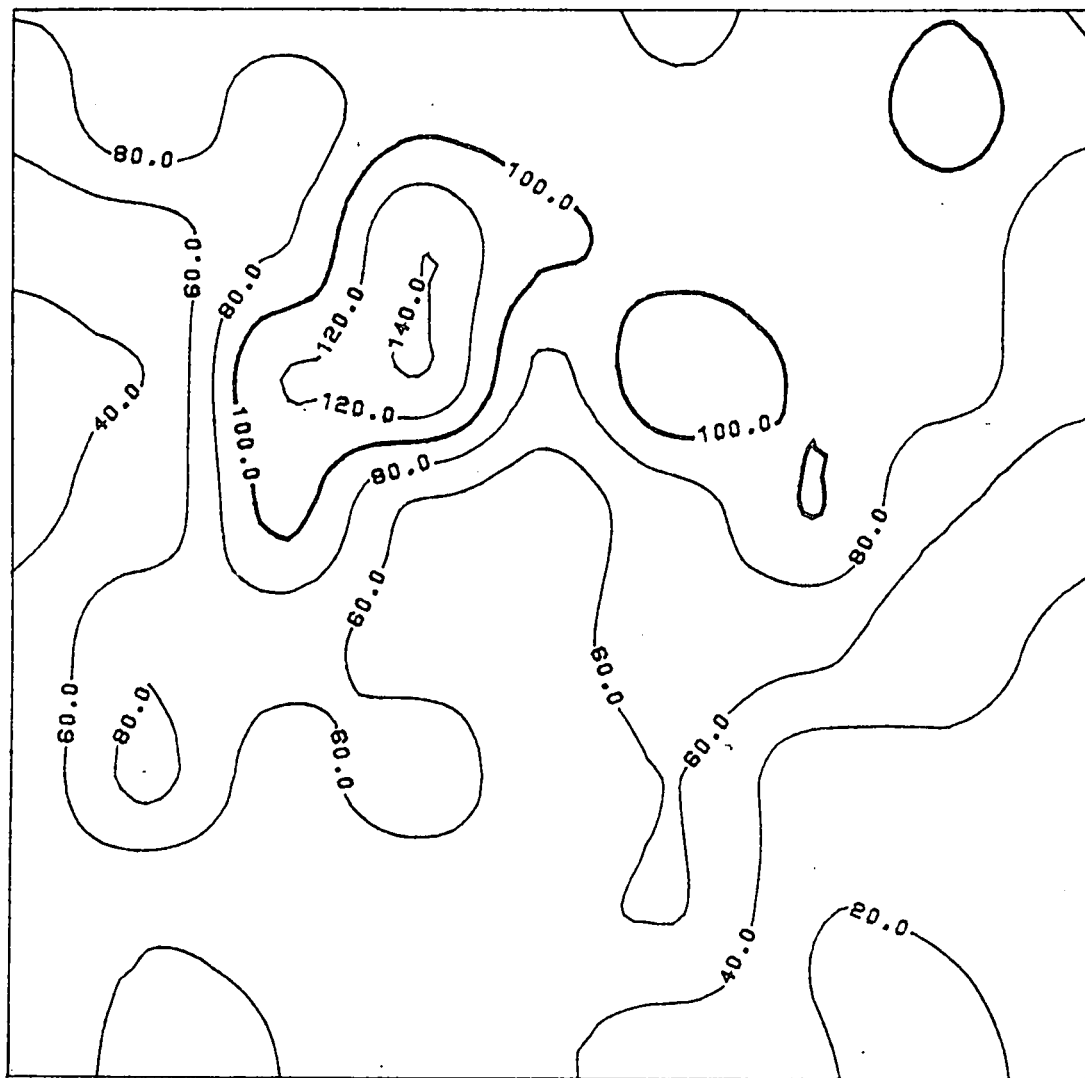
Figuur 6.2.2. Eksperimentele semi-variogram van die graviwaardes in die Zuurbekomkompartement met 'n sferiese passingsmodel.



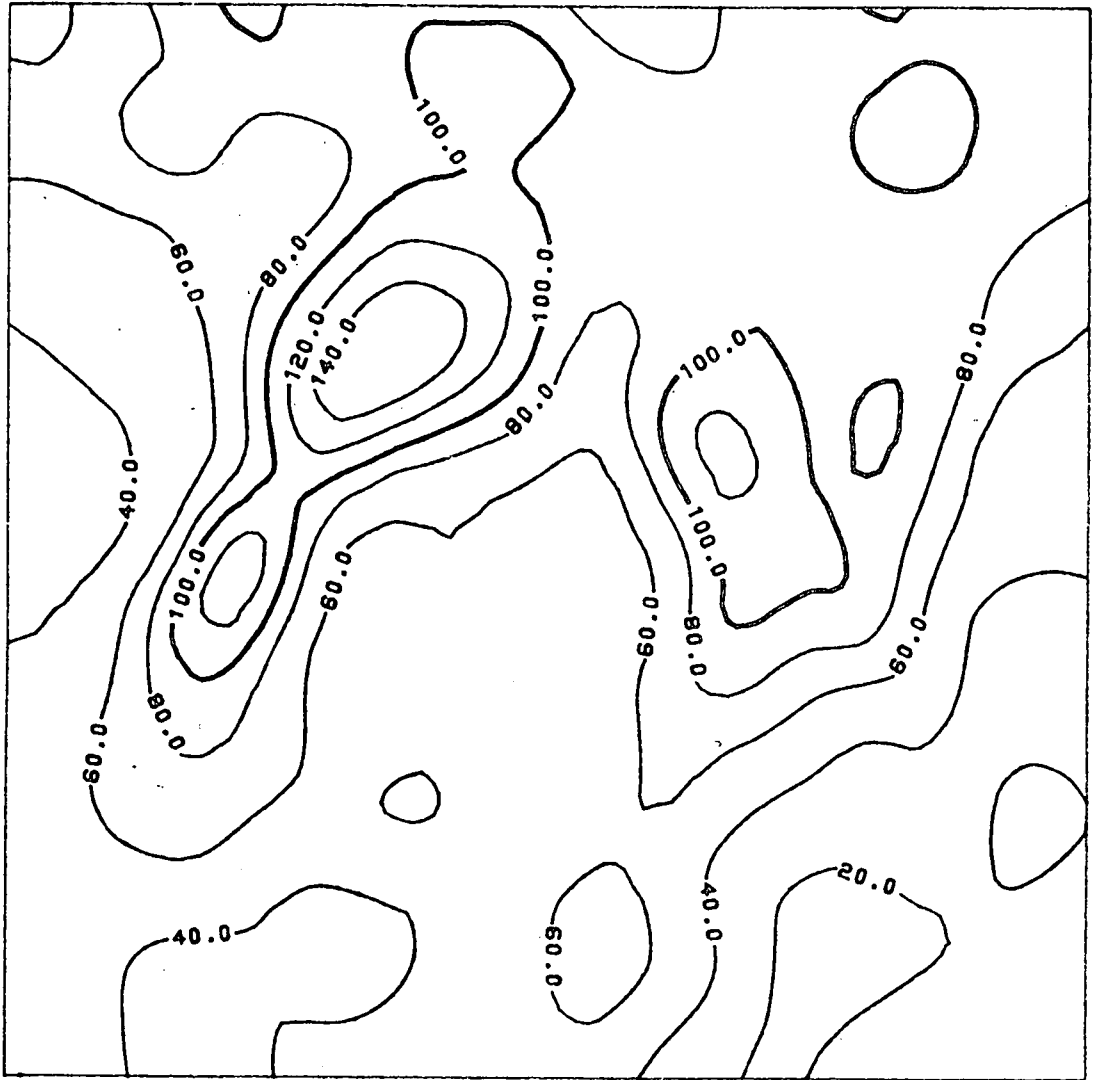
Figuur 6.2.3. Gravikontoere van die Zuurbekomkompartement soos met behulp van gewone kriging en 81 graviwaardes verkry.



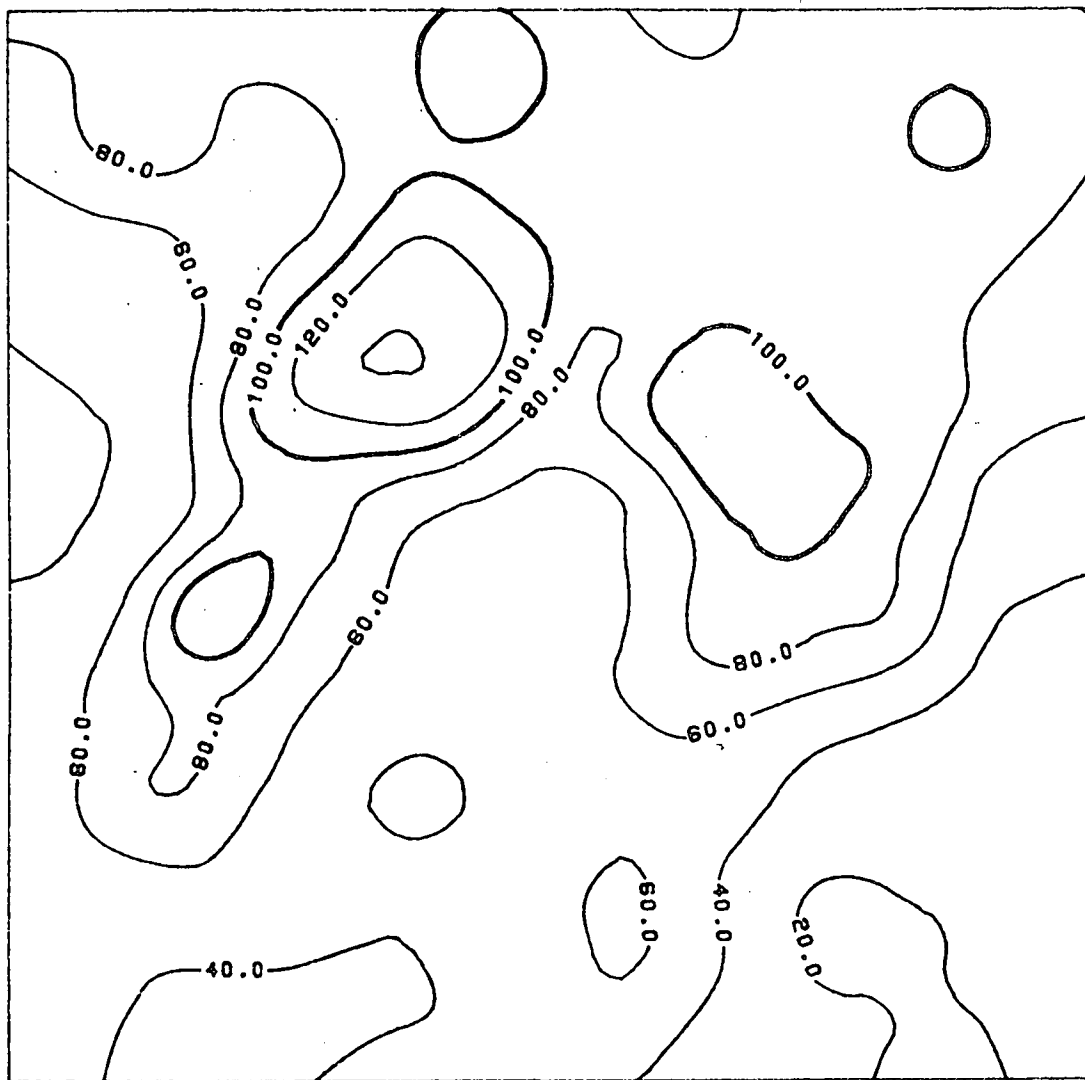
Figuur 6.2.4. Gravikontoere van die Zuurbekomkompartement soos met behulp van gewone krtging en 145 graviwaardes verkry.



Figuur 6.3.1. Diepte van vertering van die dolomiet in die Zuurbekomkompartement soos met behulp van kriging en 81 datapunte verkry.



*Figuur 6.3.2. Diepte van vertering van die dolomiet in die Zuurbekomkompartement
soos met die 1 600 datapunte verkry.*



Figuur 6.3.3. Diepte van vertering van die dolomiet in die Zuurbekomkompartement soos met 145 datapunte en kriging verkry.

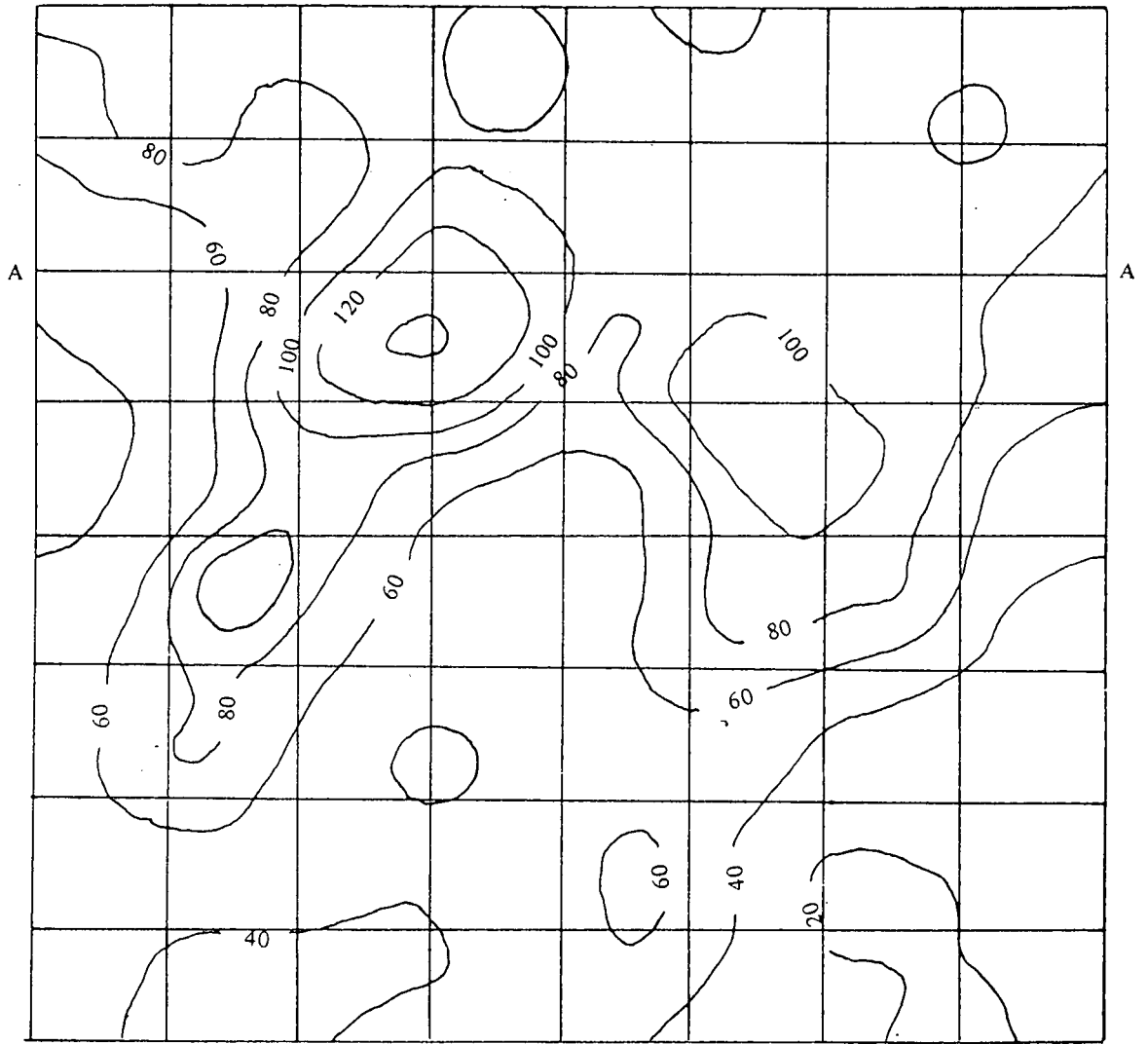
Vir dié doel is dit slegs nodig om die gebied in 'n aantal gelykverspreide elemente op te deel soos in figuur 6.3.4 getoon, en die verweringsdieptes by elke knooppunt met behulp van kriging of 'n ander geskikte metode te bereken. Vervolgens word daar grafieke van die dieptes langs elkeen van die lyne parallel aan die x-as (of indien verkies y-as) getrek. 'n Tipiese voorbeeld van so 'n grafiek vir lyn AA in figuur 6.3.4 word in figuur 6.3.5 getoon. Dit is nou baie maklik om met behulp van Simpson se reël of enige ander soortgelyke numeriese integrasie-tegniek (Carnahan *et al*; 1969) die oppervlakte tussen die dieptekromme en 'n gegewe lyn, soos die watervlaklyn BB in figuur 6.3.5, te bepaal. Nadat hierdie proses deurgevoer is vir al die lyne parallel aan die x-as, kan daar weer 'n grafiek van hierdie waardes langs 'n lyn parallel aan die y-as en wat die x-as halveer, getrek word. Die numeriese integrasie van hierdie waardes en die gegewe vaste lyn lewer dan die volume van die verweerde sones.

By die werklike toepassing van die metode is dit natuurlik nie nodig om elkeen van die grafieke werklik te gaan trek nie, maar kan bestaande rekenaarprogramme soos SIMSP in Carnahan *et al* (1969) gebruik word. Let egter net daarop dat as Simpson se reël gebruik word, moet die gebied altyd in 'n ewe aantal elemente (onewe aantal knooppunte) verdeel word.

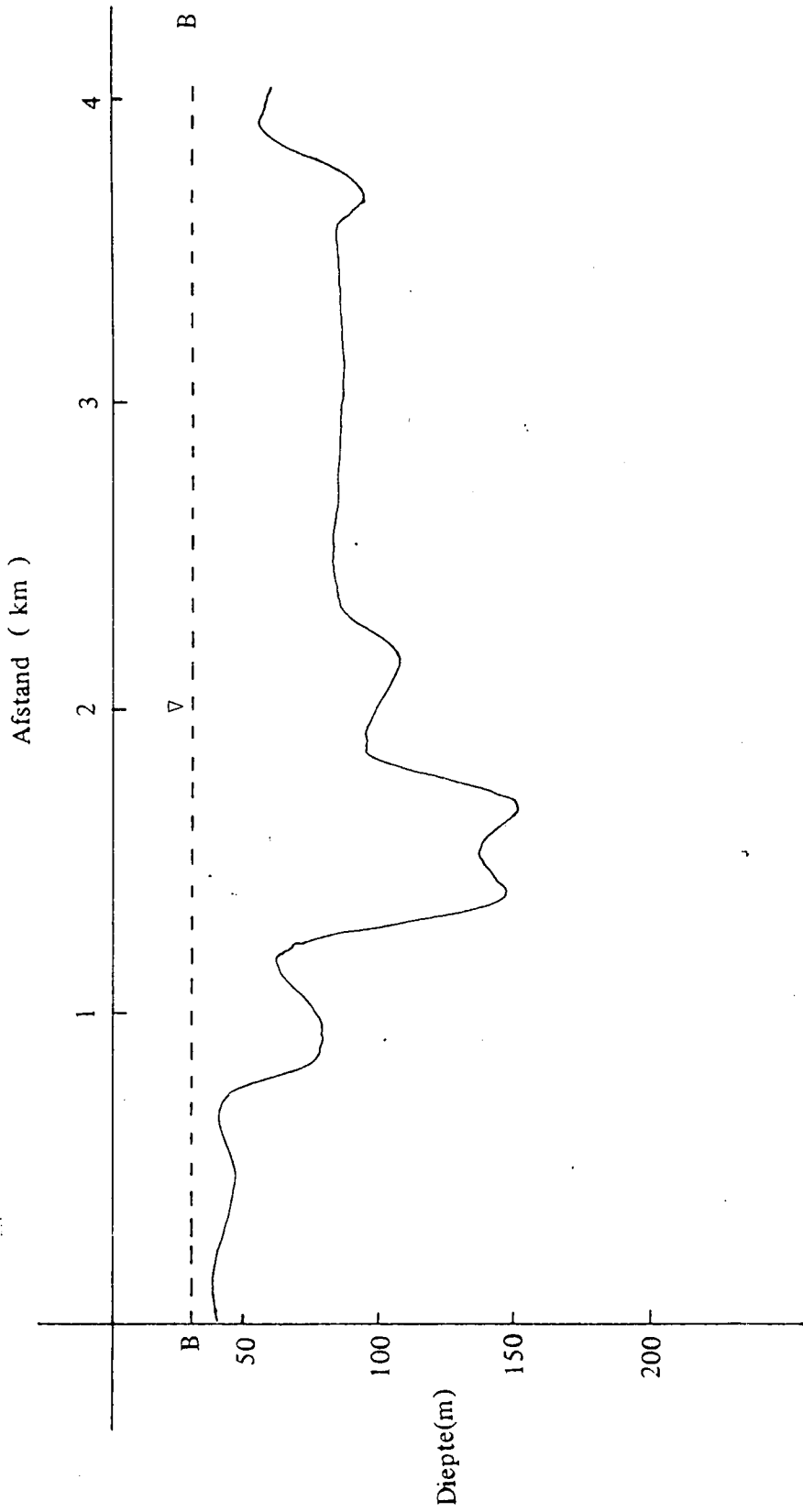
In die onderhawige studie is die gebied in sewentien profiele op afstande van 100 meter langs beide die x- en y-asse verdeel. Die volume verweerde dolomiet is toe vir elk van die data verkry vanaf 1 600, 81 en 145 waarnemings (tabel 6.3.1) bereken.

TABEL 6.3.1. VOLUME VERWEERDE DOLOMIET TESAME MET DIE OOREENSTEMMENDE FOUT

Aantal waarnemingspunte	Volume (miljoen m ³)	Persentasiefout
1 600	1 074,74	-
81	1 064,15	1,1
145	1 073,39	0,12



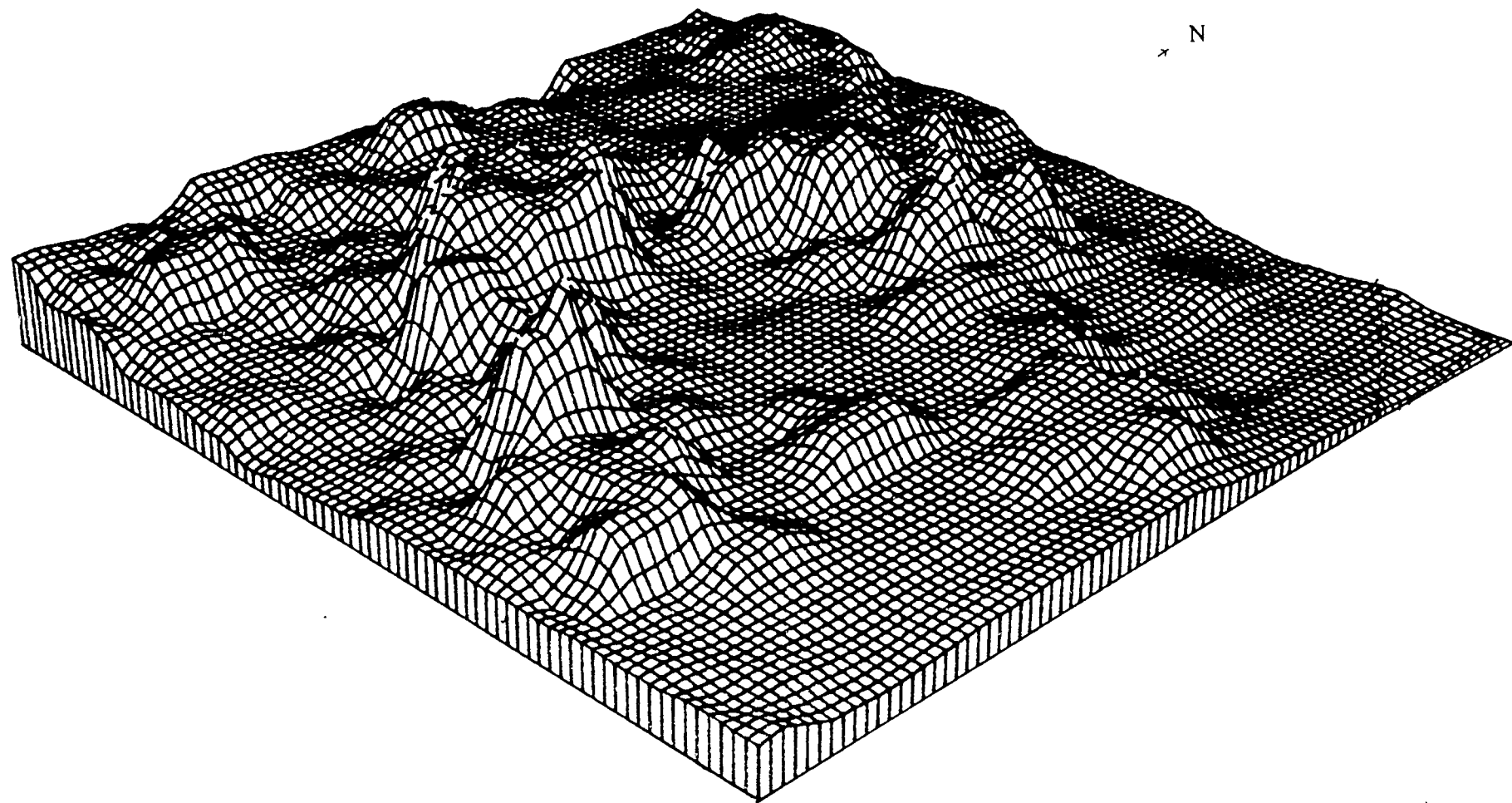
Figuur 6.3.4. Verdeling van gebied in gelijkverspreide intervallen ten einde numerieke integratie uit te voeren.



Figuur 6.3.5. Profiel deur lyn AA in figuur 6.3.4.

Hiervolgens bevat die volumeskatting, gebaseer op die 81 graviwaardes, slegs 'n persentasiefout van 1,1 relatief tot die skatting gebaseer op die 1 600 graviwaardes. Die skatting gebaseer op die 145 waardes besit slegs 'n 0,12 persentasiefout. Daar kan dus vir alle praktiese doeleindes aanvaar word dat die driedimensionale voorstelling van die diepte van verwerking soos verkry uit die 145 datapunte en in figuur 6.3.6 getoon, 'n redelike goeie weergawe van die verweerde sones in die Zuurbekomkompartement weergee.

Die belangrikheid van hierdie gevallestudie lê daarin dat dit aantoon dat as kriging gebruik word slegs 5 persent van die oorspronklike hoeveelheid gravimetings in staat is om die volume verweerde sones in dolomiete voldoende akkuraat te voorspel. In die praktyk sal 'n mens die prosedure waarskynlik effens wysig. Inderwaarheid word aanbeveel dat daar begin moet word met 'n gravitasie-opname op 'n 500 m by 500 m ruitpatroon. Nadat die gravikontoere met behulp van kriging verkry is, kan leemtes en/of plekke van relatief dieper verwerking geïdentifiseer word. Meer gedetailleerde metings behoort dan by hierdie plekke in die veld uitgevoer te word. Deur hierdie waardes by die reeds bekendes te voeg en die hele proses te herhaal, behoort die volumes van sulke verweerde sones in beginsel tot enige graad van akkuraatheid bepaal te kan word.



Figuur 6.3.6. Driedimensionale voorstelling van die diepte van vertering van die dolomiete in die Zuurbekom-kompartement. Dieptes wys volgens konvensie boontoe.

BYLAE A : TRANSMISSIWITEITE EN BERGINGSKOËFFISIËNTE VAN DIE
KAAPSE VLAKTE.

X	Y	T-waarde
355.	1983	320
508.	1542	316
593.	1254	240
644.	1186	220
762.	1220	210
1288	1593	243
1847	1559	250
2237	1525	230
2508	1440	235
2457	1525	230
2220	1711	180
1305	3186	180
1728	2983	170
1966	2932	165
2118	2864	170
2288	2949	173
2338	2830	150
2254	2440	134
3322	2067	324
3322	1932	300
3457	2033	306
3660	1983	310
4169	1864	290
3898	576.	350
3999	542.	355
4254	491.	375
4728	406.	380
4355	1084	209
4423	915.	220
4542	1033	240
5084	966.	200
5610	915.	226
6186	1949	566
6305	1830	508
6474	1999	560
6711	2084	574
7186	2237	547
6321	1423	550
6508	1338	620
6915	1288	700
7542	1135	890
8118	3424	551
8508	3372	508
8830	3338	450
8949	3322	470
11067	1271.	350
11237	1237	360
11474	1220	380
11965	1135	390
2864	4627	134
3203	4440	140
3169	4237	160
3491	4118	120
3406	4033	125
4050	4355	150
4338	4254	141
4271	4118	120
4254	3966	184
9966	6355	90
10135	5576	110
10152	5254	130
10271	5152	135
10101	5101	140
2050	7440	50
2033	7067	30
4983	7610	30
5152	7644	40
5321	7593	45
5762	7559	35
3372	4203	130

X	Y	S-waarde
355.	1983	. 179
508.	1542	. 169
593.	1254	. 195
644.	1186	. 328
762.	1220	. 351
1847	1559	. 2
2508	1440	. 25
2220	1711	. 21
1966	2932	. 16
2118	2864	. 15
2288	2949	. 17
3457	2033	. 344
3660	1983	. 340
4169	1864	. 345
3999	542.	. 16
4254	491.	. 15
4423	915.	. 10
4542	1033	. 09
5610	915.	. 076
6186	1949	. 177
6305	1830	. 091
6474	1999	. 089
6711	2084	. 093
7186	2237	. 090
6321	1423	. 06
6508	1338	. 081
6915	1288	. 039
7542	1135	. 044
8118	3424	. 055
8508	3372	. 235
8830	3338	. 229
11067	1271.	. 122
11474	1220	. 137
11965	1135	. 135
3203	4440	. 138
3169	4237	. 136
3491	4118	. 134
4050	4355	. 140
4338	4254	. 158
4271	4118	. 157
4254	3966	. 156
10135	5576	. 140
10152	5254	. 141
10271	5152	. 125
2050	7440	. 002
2033	7067	. 002
5152	7644	. 054
5321	7593	. 053
5762	7559	. 051

BYLAE B : WATERVLAKWAARDES VAN DIE TOPPENISH CREEK-AKWIFEER.

X	Y	watervlak	X	Y	watervlak
34. 052	12. 277	782. 110	31. 116	14. 000	819. 800
34. 517	12. 027	775. 390	32. 085	13. 463	810. 900
33. 507	12. 045	784. 350	33. 254	13. 062	796. 400
30. 162	11. 007	781. 280	34. 674	13. 045	783. 100
34. 066	11. 470	773. 520	35. 121	15. 961	805. 200
35. 009	11. 030	760. 440	37. 778	14. 029	774. 040
33. 508	10. 952	771. 850	36. 797	13. 624	768. 520
33. 748	10. 377	762. 400	30. 079	19. 467	893. 200
31. 968	10. 451	774. 050			
30. 188	10. 335	775. 580			
31. 557	9. 473	766. 990			
33. 456	9. 973	758. 200			
34. 561	8. 978	745. 560			
30. 986	8. 897	765. 320			
39. 748	12. 020	736. 320			
36. 507	12. 491	769. 700			
36. 827	12. 013	749. 270			
36. 243	11. 897	766. 500			
38. 847	11. 403	735. 500			
35. 982	9. 364	740. 000			
37. 602	9. 846	733. 060			
37. 856	9. 325	730. 250			
37. 446	9. 155	730. 450			
38. 201	9. 521	728. 130			
38. 188	9. 368	727. 530			
39. 385	9. 122	721. 550			
40. 475	8. 741	708. 800			
40. 451	8. 185	714. 800			
39. 838	8. 681	708. 000			
38. 575	8. 813	722. 440			
36. 529	8. 521	729. 330			
35. 958	8. 155	729. 850			
36. 584	7. 275	729. 830			
40. 611	7. 725	712. 130			
40. 996	11. 965	722. 230			
41. 983	11. 068	711. 350			
41. 325	8. 994	703. 550			
43. 454	8. 291	689. 580			
42. 469	8. 806	706. 700			
42. 632	7. 789	701. 990			
43. 562	7. 946	694. 000			
43. 469	7. 869	695. 360			
44. 014	8. 024	690. 930			
31. 100	19. 008	885. 800			
31. 961	18. 740	867. 800			
30. 756	18. 719	886. 100			
31. 008	18. 739	883. 450			
30. 106	18. 297	880. 450			
29. 363	18. 719	883. 250			
30. 133	17. 051	861. 350			
33. 501	17. 551	844. 850			
34. 828	16. 978	822. 900			
34. 669	16. 267	818. 600			
33. 263	16. 995	842. 900			
32. 189	16. 648	848. 300			
32. 044	16. 073	845. 300			
30. 956	16. 264	849. 900			
29. 881	15. 035	830. 150			
33. 769	15. 019	814. 800			
34. 326	15. 519	812. 500			
35. 030	15. 021	801. 900			
31. 686	14. 921	827. 900			
32. 018	14. 499	818. 550			
30. 651	14. 192	822. 900			
30. 001	14. 402	835. 000			
29. 324	14. 057	818. 950			
30. 187	13. 405	814. 800			
31. 010	13. 195	807. 200			

Y	X	Ca	Na	HCO ₃	Cl	SO ₄	faktor 1	faktor 2
85146.60	33220.89	53.0	32.0	298.0	34.0	15.0	510	2.460
85476.60	30875.64	44.0	21.0	281.0	17.0	8.0	290	2.300
82627.50	34446.21	77.0	51.0	386.0	107.0	49.0	1.240	2.060
82685.80	34687.50	45.0	22.0	345.0	36.0	8.0	230	2.700
82685.80	34800.93	94.0	28.0	345.0	81.0	21.0	1.150	2.530
71583.10	42930.12	38.0	17.0	131.0	32.0	2.0	580	1.250
71679.60	42861.19	52.0	43.0	298.0	46.0	9.0	500	2.510
70950.60	42187.31	24.0	11.0	109.0	11.0	1.0	360	1.130
70848.30	43105.61	7.0	5.0	43.0	4.0	1	260	710
70809.80	43035.73	40.0	21.0	289.0	17.0	32.0	460	2.420
78271.00	30608.02	81.0	26.0	402.0	25.0	45.0	850	3.090
80560.10	29741.08	42.0	37.0	293.0	54.0	51.0	820	2.550
81604.50	29949.36	44.0	31.0	297.0	35.0	40.0	650	2.530
81243.40	30118.50	43.0	22.0	288.0	30.0	18.0	420	2.360
83600.20	28683.53	40.0	25.0	286.0	49.0	16.0	450	2.340
83032.40	27686.61	53.0	44.0	298.0	83.0	62.0	1.170	2.570
78296.50	30727.89	58.0	14.0	294.0	24.0	1.0	390	2.260
77999.50	32666.54	39.0	30.0	305.0	17.0	5.0	150	2.540
75508.30	31145.43	13.0	3.0	65.0	4.0	1	280	820
73446.10	44640.93	27.0	12.0	180.0	9.0	2.0	230	1.610
72101.00	40449.41	47.0	12.0	239.0	10.0	1.0	330	1.930
70901.00	42974.25	8.0	6.0	38.0	4.0	1	290	680
71450.50	43080.51	11.0	5.0	49.0	3.0	1	300	740
71120.60	41212.30	41.0	13.0	190.0	16.0	2.0	410	1.630
70034.50	39310.54	36.0	20.0	194.0	30.0	1.0	390	1.700
78094.10	34112.20	60.0	15.0	307.0	19.0	1	360	2.350
76691.30	36152.29	36.0	19.0	249.0	16.0	1.0	200	2.080
76575.30	35171.76	59.0	23.0	238.0	105.0	6.0	930	1.820
76333.50	35059.15	39.0	14.0	248.0	13.0	1	210	2.030
76760.60	36125.85	52.0	11.0	262.0	11.0	13.0	450	2.090
82764.50	32564.04	74.0	29.0	393.0	53.0	13.0	600	2.960
81641.40	33548.05	39.0	23.0	377.0	22.0	5.0	000	2.960
79264.20	34172.42	73.0	18.0	289.0	68.0	3.0	790	2.130
79638.90	31238.76	43.0	46.0	360.0	58.0	25.0	450	3.000
79978.50	42829.03	40.0	74.0	52.0	10.0	150.0	5.890	2.000
79981.10	42673.96	57.0	11.0	260.0	17.0	8.0	500	2.040
80275.60	42958.67	55.0	8.0	216.0	19.0	17.0	670	1.740
78757.90	42900.67	49.0	15.0	258.0	29.0	10.0	470	2.070
79025.30	42630.11	60.0	11.0	251.0	35.0	80.0	1.320	2.100
80403.10	41605.98	56.0	27.0	334.0	47.0	19.0	550	2.630

BYLAE C : HIDROGEOCHEMIESE WAARDES VAN DIE VRYBURG-OMGEWING.

Y	X	Ca	Na	HCO ₃	Cl	SO ₄	faktor 1	faktor 2
79175.20	37864.24	41.0	12.0	315.0	16.0	9.0	180	2.470
79743.70	38256.39	62.0	34.0	311.0	104.0	42.0	1.140	2.470
79508.50	38331.99	93.0	66.0	212.0	229.0	145.0	3.280	1.970
75569.60	41825.93	64.0	50.0	404.0	81.0	27.0	720	3.220
79476.00	38106.55	71.0	39.0	285.0	168.0	50.0	1.660	2.210
80455.60	37472.31	43.0	20.0	324.0	39.0	11.0	300	2.550
82352.60	37299.55	103.0	70.0	385.0	170.0	36.0	1.700	2.980
83347.20	37300.29	45.0	12.0	279.0	17.0	5.0	280	2.210
81369.10	38399.50	49.0	16.0	336.0	26.0	12.0	300	2.610
84492.70	34964.18	48.0	13.0	278.0	15.0	5.0	310	2.200
84823.60	36297.37	54.0	19.0	287.0	29.0	11.0	480	2.280
85251.90	40414.94	47.0	25.0	346.0	35.0	34.0	510	2.790
84347.80	41308.95	66.0	11.0	335.0	26.0	13.0	510	2.500
83851.00	37969.97	50.0	16.0	276.0	34.0	7.0	440	2.180
83545.60	41036.50	90.0	69.0	281.0	272.0	79.0	2.630	2.240
83545.60	41070.50	108.0	79.0	253.0	316.0	94.0	3.250	2.030
83453.40	42961.53	36.0	26.0	301.0	19.0	33.0	400	2.560
83422.40	44950.38	41.0	14.0	326.0	34.0	9.0	230	2.530
81534.80	44352.75	36.0	19.0	335.0	23.0	11.0	120	2.670
82610.40	45909.10	89.0	36.0	394.0	87.0	29.0	1.080	2.950
79448.80	45905.97	39.0	15.0	220.0	14.0	9.0	370	1.870
85018.30	34967.86	98.0	64.0	218.0	216.0	68.0	2.530	1.820
86669.80	46457.02	46.0	26.0	292.0	91.0	10.0	620	2.290
86681.20	40820.39	38.0	14.0	294.0	19.0	9.0	200	2.350
85796.00	45142.32	6.0	5.0	11.0	5.0	1.0	340	500
83308.00	25605.32	21.0	91.0	455.0	81.0	66.0	470	4.120
81149.00	21700.32	33.0	132.0	322.0	110.0	54.0	970	3.430
84269.00	22580.32	112.0	50.0	339.0	145.0	70.0	2.130	2.600
82200.00	22618.32	41.0	142.0	365.0	88.0	63.0	960	3.820
70522.00	33733.32	97.0	54.0	215.0	202.0	39.0	2.180	1.690
69405.00	22355.32	37.0	234.0	480.0	130.0	77.0	1.010	5.290
70208.00	19663.32	91.0	57.0	220.0	196.0	52.0	2.200	1.800
69998.00	21719.32	29.0	282.0	495.0	159.0	88.0	1.140	5.760
73765.00	20633.32	25.0	310.0	575.0	141.0	101.0	970	6.590
74332.00	19523.32	55.0	172.0	381.0	232.0	96.0	2.030	3.950
74944.00	21075.32	62.0	127.0	326.0	151.0	90.0	1.820	3.320
73397.00	22252.32	69.0	176.0	413.0	237.0	98.0	2.170	4.140
75532.00	22640.32	92.0	56.0	307.0	102.0	34.0	1.440	2.490
73259.00	21791.32	88.0	67.0	257.0	119.0	47.0	1.720	2.260
72251.00	30668.32	82.0	201.0	434.0	238.0	110.0	2.410	4.450
73170.00	28003.32	130.0	108.0	230.0	296.0	81.0	3.380	2.030
74246.00	29203.32	97.0	47.0	349.0	110.0	23.0	1.330	2.650
74794.00	27763.32	87.0	111.0	303.0	220.0	119.0	2.740	2.910
69505.00	30424.32	45.0	153.0	357.0	109.0	54.0	1.040	3.780
76356.00	28142.32	85.0	31.0	192.0	114.0	21.0	1.540	1.500
74211.00	24927.32	60.0	43.0	278.0	175.0	14.0	1.220	2.140
75604.00	26780.32	93.0	48.0	258.0	75.0	37.0	1.480	2.150
75225.00	25023.32	140.0	99.0	300.0	296.0	140.0	3.900	2.530
74099.00	38895.32	14.0	14.0	203.0	14.0	1.0	030	1.820
74286.00	38896.32	39.0	36.0	308.0	12.0	15.0	230	2.640
75042.00	36478.32	51.0	15.0	276.0	17.0	1.0	320	2.180

BYLAE D : GRAVITASIEWAARDES VAN DIE ZUURBEKOMKOMPARTEMENT.

X	Y	milligal	X	Y	milligal
0.	0.	- .22	0000.	3500.	-0. 65
500.	0.	- .12	0500.	3500.	-1. 21
1000.	0.	- .01	1000.	3500.	-0. 70
1500.	0.	- .06	1500.	3500.	-1. 17
2000.	0.	- .05	2000.	3500.	-1. 17
2500.	0.	- .26	2500.	3500.	-1. 06
3000.	0.	- .37	3000.	3500.	-1. 17
3500.	0.	- .65	3500.	3500.	-1. 44
4000.	0.	- .24	4000.	3500.	-1. 02
0000.	500.	- .16	0000.	4000.	-1. 05
0500.	500.	- .01	0500.	4000.	-0. 98
1000.	500.	- .02	1000.	4000.	-1. 34
1500.	500.	- .01	1500.	4000.	-1. 25
2000.	500.	- .40	2000.	4000.	-1. 17
2500.	500.	- .45	2500.	4000.	-0. 65
3000.	500.	- .64			
3500.	500.	- .46	3000.	4000.	-1. 19
4000.	500.	- .25	3500.	4000.	-1. 20
0000.	1000.	- .15	4000.	4000.	-0. 85
0500.	1000.	- .94			
1000.	1000.	- .28			
1500.	1000.	- .73			
2000.	1000.	- .16			
2500.	1000.	- .45			
3000.	1000.	- .28			
3500.	1000.	- .02			
4000.	1000.	- .42			
0.	1500.	-0. 14			
500.	1500.	-0. 81			
1000.	1500.	-0. 60			
1500.	1500.	-0. 28			
2000.	1500.	-0. 34			
2500.	1500.	-0. 73			
3000.	1500.	-0. 54			
3500.	1500.	-0. 08			
4000.	1500.	0. 06			
0000.	2000.	0. 08			
500.	2000.	-0. 22			
1000.	2000.	-1. 32			
1500.	2000.	-0. 39			
2000.	2000.	-0. 23			
2500.	2000.	-0. 74			
3000.	2000.	-1. 25			
3500.	2000.	-0. 49			
4000.	2000.	-0. 08			
0000.	2500.	+0. 27			
500.	2500.	-0. 15			
1000.	2500.	-1. 75			
1500.	2500.	-2. 04			
2000.	2500.	-0. 96			
2500.	2500.	-1. 72			
3000.	2500.	-1. 31			
3500.	2500.	-1. 04			
4000.	2500.	-0. 62			
0000.	3000.	-0. 10			
500.	3000.	-0. 27			
1000.	3000.	-0. 97			
1500.	3000.	-2. 00			
2000.	3000.	-1. 44			
2500.	3000.	-1. 14			
3000.	3000.	-1. 09			
3500.	3000.	-1. 05			
4000.	3000.	-0. 56			

(81 graviwaardes)

(145 graviwaardes)

X	Y	milligal	X	Y	milligal
0.	0.	- .22	0500.	4000.	-0.98
500.	0.	.12	1000.	4000.	-1.34
1000.	0.	-.01	1500.	4000.	-1.25
1500.	0.	-.06	2000.	4000.	-1.17
2000.	0.	-.05	2500.	4000.	-0.65
2500.	0.	.26	3000.	4000.	-1.19
3000.	0.	.37	3500.	4000.	-1.20
3500.	0.	.65	4000.	4000.	-0.85
4000.	0.	.24	250.	250.	-0.07
0000.	500.	-.16	750.	250.	0.09
0500.	500.	-.01	1250.	250.	0.07
1000.	500.	-.02	1750.	250.	0.04
1500.	500.	-.01	2250.	250.	-0.50
2000.	500.	-.40	2750.	250.	0.28
2500.	500.	-.45	3250.	250.	0.36
3000.	500.	.64	3750.	250.	0.36
3500.	500.	.46	250.	750.	-0.06
4000.	500.	.25	750.	750.	-0.37
0000.	1000.	-.15	1250.	750.	-0.04
0500.	1000.	-.94	1750.	750.	-0.05
1000.	1000.	-.28	2250.	750.	-0.50
1500.	1000.	-.73	2750.	750.	0.43
2000.	1000.	-.16	3250.	750.	0.52
2500.	1000.	-.45	3750.	750.	0.51
3000.	1000.	.28	250.	1250.	-0.35
3500.	1000.	.02	750.	1250.	-0.93
4000.	1000.	.42	1250.	1250.	-0.17
0.	1500.	-0.14	1750.	1250.	-0.27
500.	1500.	-0.81	2250.	1250.	-0.26
1000.	1500.	-0.60	2750.	1250.	-0.25
1500.	1500.	-0.28	3250.	1250.	0.22
2000.	1500.	-0.34	3750.	1250.	0.41
2500.	1500.	-0.73	250.	1750.	-0.19
3000.	1500.	-0.54	750.	1750.	-1.90
3500.	1500.	-0.08	1250.	1750.	-0.58
4000.	1500.	0.06	1750.	1750.	-0.38
0000.	2000.	0.08	2250.	1750.	-0.41
500.	2000.	-0.22	2750.	1750.	-1.47
1000.	2000.	-1.32	3250.	1750.	-1.08
1500.	2000.	-0.39	3750.	1750.	0.07
2000.	2000.	-0.23	250.	2250.	0.07
2500.	2000.	-0.74	750.	2250.	-0.49
3000.	2000.	-1.25	1250.	2250.	-0.89
3500.	2000.	-0.49	1750.	2250.	-0.51
4000.	2000.	-0.08	2250.	2250.	-0.46
0000.	2500.	+0.27	2750.	2250.	-1.74
500.	2500.	-0.15	3250.	2250.	-1.35
1000.	2500.	-1.75	3750.	2250.	-0.17
1500.	2500.	-2.04	250.	2750.	-0.24
2000.	2500.	-0.96	750.	2750.	-0.62
2500.	2500.	-1.72	1250.	2750.	-2.18
3000.	2500.	-1.31	1750.	2750.	-2.07
3500.	2500.	-1.04	2250.	2750.	-.75
4000.	2500.	-0.62	2750.	2750.	-1.38
0000.	3000.	-0.10	3250.	2750.	-1.21
500.	3000.	-0.27	3750.	2750.	-0.57
1000.	3000.	-0.97	250.	3250.	-0.40
1500.	3000.	-2.00	750.	3250.	-0.64
2000.	3000.	-1.44	1250.	3250.	-0.89
2500.	3000.	-1.14	1750.	3250.	-1.28
3000.	3000.	-1.09	2250.	3250.	-0.96
3500.	3000.	-1.05	2750.	3250.	-0.96
4000.	3000.	-0.56	3250.	3250.	-1.13
0000.	3500.	-0.65	3750.	3250.	-1.08
0500.	3500.	-1.21	250.	3750.	-0.88
1000.	3500.	-0.70	750.	3750.	-0.97
1500.	3500.	-1.17	1250.	3750.	-1.18
2000.	3500.	-1.17	1750.	3750.	-1.72
2500.	3500.	-1.06	2250.	3750.	-1.29
3000.	3500.	-1.17	2750.	3750.	-1.07
3500.	3500.	-1.44	3250.	3750.	-1.15
4000.	3500.	-1.02	3750.	3750.	-1.17
0000.	4000.	-1.05			

VERWYSINGS

- BOTHA, J.F. (1979). Error estimation for the solution of ordinary differential equations by the method of collocation. Symposium on numerical methods, Univ. Natal, Durban.
- BOTHA, J.F. and PINDER, G.F. (1983). Fundamental concepts in the numerical solution of differential equations. John Wiley and Sons, New York.
- BURDEN, R.L., FAIRES, J.D. and REYNOLDS, A.C. (1978). Numerical analysis. Prindle, Weber and Schmidt, Incorporated, Massachusetts.
- CARNAHAN, B., LUTHER, H.A. and WILKES, J.O. (1969). Applied numerical methods. John Wiley and Sons, New York.
- CHEBOTAREV, I.I. (1955). Metamorphism of natural waters in the crust of weathering. *Geochim. Cosmochim. Acta*, Vol. 8, 22-23.
- COURANT, R. and HILBERT, D. (1966). Methods of mathematical physics (2 Volumes). Wiley (Interscience), New York.
- CRESSIE, N. and HAWKINS, D.M. (1979). Robust estimation of the variogram. Twisk 83 report CSIR, Pretoria, South Africa.
- DAVID, M. (1977). Developments in geomathematics 2 : Geostatistical ore reserve estimation. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- DE BOOR, C. (1978). A practical guide to splines. Springer-Verlag, New York.

- DELHOMME, J.P. (1978). Kriging in Hydrosociences. *Advances in Water Resources, Vol. 1, No. 5, 251-266.*
- DELHOMME, J.P. (1979). Spatial variability and uncertainty in groundwater flow parameters; a geostatistical approach. *Water Resources Research, Vol. 15, No. 2, 269-280.*
- FLETCHER, R. (1973). A generalization of Powell's penalty function to inequality constraints. Harwell Subroutine Library, TP 552.
- GAMBOLATI, G. and VOLPI, G. (1979). Groundwater mapping in Venice by stochastic interpolators 1 and 2. *Water Resources Research, Vol. 15, No. 2, 281-297.*
- GERBER, A., 1976. 'n Ondersoek na die hidrouliese eienskappe van die ondergrondse waterbron in die Kaapse Vlakte. Ongepubliseerde M.Sc.-verhandeling, U.O.V.S., Bloemfontein.
- HAAS, A.G. and VIALIX, J.R. (1976). Krigage applied to geophysics : The answer to the problem of estimates and contouring. *Geophysical Prospecting, Vol. 24.*
- HARPER, J.B. (1980). A FORTRAN IV and HPL Programme for the solution of the inverse problem in two-dimensional gravity modelling. Report No. 1980-0122, Geological Survey, Pretoria.
- HENZEN, M.R. (1973). Die herwinning, opberging en onttrekking van gesuiwerde rioolwater in die Kaapse Skiereiland. Ongepubliseerde D.Sc.-tesis, U.O.V.S., Bloemfontein.
- HUGHES, J.P. and LETTENMAIER, D.P. (1981). Data requirements for kriging : Estimation and network design. *Water Resources Research, Vol. 17, No. 6, 1641-1650.*

- HUIJBREGTS, C.J. and MATHERON, G. (1970). Universal kriging – an optimal approach to trend surface analysis. Decision-making in the Mineral Industry, *CIM Spec.*, Vol. 12, Montreal, 159-169.
- HUIJBREGTS, C.J. and MATHERON, G. (1971). Universal kriging. *Can. Inst. Min. Metall., spec. vol. 12*, 159-169.
- JOURNEL, A.G. (1969). Rapport d'études sur l'estimation d'une variable régionalisée : application à la cartographie automatique. Service Hydrographique de la Marine, Paris.
- JOURNEL, A.G. and HUIJBREGTS, C.J. (1978). Mining geostatistics. Academic Press, London.
- JOHNSON, J.H. (1974). Hydrochemistry in groundwater exploration. Groundwater Symp., Bulawayo.
- KRIGE, D.G. (1951). A statistical approach to some mine valuations and allied problems at the Witwatersrand. Unpublished M.Sc. thesis, Univ. of the Witwatersrand, Johannesburg.
- KRIGE, D.G. (1978). Geostatistics 1. Lognormal-de Wijsian Geostatistics for Ore Evaluation. South Africa Inst. of Mining and Metallurgy, Johannesburg.
- MATHERON, G. (1963). Principles of geostatistics. *Econ. Geol.*, 58, 1246-1266.
- MATHERON, G. (1971). The theory of regionalized variables and its applications. Les Cahiers du CMM. Fasc. No. 5, CG, Fontainebleau.
- MATHERON, G. (1973). The intrinsic random functions and their applications. *Advances in Applied Probability*, No. 5, 439-468.

- MATHERON, G. (1974). Effet proportional et lognormalité ou le retour du serpent de mer. Internal report N-374, CG, Fontainebleau.
- McLAIN, D.H. (1974). Drawing contours from arbitrary data points, *The Computer Journal*, Vol. 17, 318-324.
- NELSON, L.S. (1981). A simple test for normality. *Technical Aids*, Vol. 13, 76-77.
- PARASNIS, D.S. (1973). Mining geophysics. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- PINDER, G.F., CELIA, M. and GRAY, W.G. (1981). Velocity calculations from randomly located hydraulic heads. *Ground Water*, Vol. 19, No. 3.
- POISSONET, M., MILLIER, C. and SERRA, J. (1970). Morphologie mathématique et sylviculture. Conference du groupe des Statisticiens Forestiers, Paris, 287-307.
- PRENTER, P.M. (1975). Splines and variational methods. John Wiley and Sons, New York.
- RENDU, J.M. (1978). Geostatistics 2 : An introduction to geostatistical methods of mineral evaluation. South African Institute of Mining and Metallurgy, Johannesburg.
- RIVLIN, T.J. (1969). An introduction to the approximation of functions. Blaisdell, Waltham Mass.
- SABATIER, P.C. (1978). Introduction to applied inverse problems in Lecture Notes in Physics. (Red. Ehlers, J. *et al*), Springer-Verlag, Berlyn.

SCHOELLER, H. (1959). Arid Zone Hydrology, Recent Developments. Unesco Rev. Reicardi 12.

SKRIVAN, J.A. and KARLINGER, M.R. (1980). Semi-variogram estimation and universal kriging program. A United States Geological Survey Publication, Water Resources Division, Tacoma, Washington.

STROUD, A.H. (1974). Numerical quadrature and solution of ordinary differential equations. Springer-Verlag, New York.

VAN DER WESTHUIZEN, C. (1981). Geohydrological aspects of the Vryburg Compartment, Northern Cape Province. Unpublished M.Sc. thesis, U.O.F.S., Bloemfontein.

VAN TONDER, G.J. (1979). Statistics and data analysis in hydrogeochemistry. Unpublished M.Sc. thesis, U.O.F.S., Bloemfontein.

WESSELS, W.P.J. en GREEFF, G.J. (1980). 'n Ondersoek na die optimale benutting van Eersterivierwater deur opberging in sandafsettings of ander metodes. Projek van die Departement Siviele Ingenieurswese, Universiteit van Stellenbosch.

OPSOMMING

Die hoofdoel van hierdie studie is om ondersoek na die toepassing van kriging in die geohidrologie in te stel. Vir hierdie doel was dit nodig om basiese krigingprogramme te ontwikkel om die ondersoek uit te voer.

Ondersoek is na die verskeie passingsmodelle vir die eksperimentele semi-variogram ingestel en daar is gevind dat indien die eksperimentele semi-variogram 'n holte-effek, soos in die geval van die transmissiwiteite en bergingskoëffisiënte van die Kaapse Vlakte, vertoon, kleinste kwadraat latfunksies met groot vrug toegepas kan word. Hier moet egter sorg gedra word dat geraas (klein lokale variasies in die data) teenwoordig in die semi-variogram, wat altyd voorkom weens die metode van berekening, sover as moontlik uitgeskakel word.

In die modellering van die watervlak in 'n akwifer as 'n funksie van tyd, is dit nodig om die transmissiwiteite en bergingskoëffisiënte te varieer. Hierdie variasies kan egter nie willekeurig uitgevoer word nie. Die krigingfout kan hier met groot vrug gebruik word om 'n aanduiding van die toelaatbare variasie te gee. In die studie van die transmissiwiteite en bergingskoëffisiënte van die Kaapse Vlakte is gevind dat deur van kriging gebruik te maak, die hoeveelheid boorgate wat benodig word aansienlik verminder kan word. Daarbenewens kan dit ook gebruik word om die posisies van die boorgate meer optimaal te plaas. Kriging kan dus die oorhoofse kostes van 'n boorprogram aansienlik besnoei.

Waar watervlakke geïnterpoleer moet word, is gevind dat universele kriging goeie resultate lewer. Daar is verder gevind dat die metode van Gambolati en Volpi (1979), waar die drywing eers uitgefilter word met 'n versameling goedgekose basisfunksies as 'n voorvereiste vir universele kriging, net sulke goeie waardes as die gewone manier van Matheron lewer. Berekenings uitgevoer met die Toppenish Creek data het getoon dat basisfunksies gekies

uit trigonometriese polinome uiters geskik is vir die doel. 'n Interessante metode waarop afgekom is en wat ook die onsydige voorwaarde bevredig, is die opbreek van die universele krigingmatriks. Vir hierdie geval hoef geen eksperimentele semi-variogram bereken te word nie.

Verder in die studie word aangetoon dat kriging ook heel doeltreffend vir die interpolasie van hidrogechemiese parameters aangewend kan word. Deur kontoerkaarte van hierdie parameters tot 'n mens se beskikking te hê, kan handige afleidings met betrekking tot verskillende eienskappe van die grondwater in 'n akwifer gemaak word.

Toepassing van kriging op gravimetriese data het getoon dat die volumes van oplossingsholtes in dolomiet met 'n uiters klein hoeveelheid data akkuraat bepaal kan word.
